Požadavky ke zkoušce z Diskrétní matematiky

Karel Velička

07-01-2023

Definice, věty, důkazy

Obsah

Notace: $[n] = \{1, ..., n\}$; $[n_k] = \{k, ...n\}$

1 Definice

1.1 Úvod

1.1.1 Operace s čísly

- **Suma:** $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + ... + a_n$
- **Produkt:** $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot ... \cdot a_n$
- **Horní celá část:** $\lceil x \rceil$ je nejbližší vyšší celé číslo k x
- **Dolní celá část:** $\lfloor x \rfloor$ je nejbližší nižší celé číslo k x

1.1.2 Množinové operace

- **Rovnost:** $A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- **Inkluze:** $A \subseteq B \iff (x \in A) \implies (x \in B)$
- **Sjednocení:** $A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$
- **Průnik:** $A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$
- **Rozdíl:** $A \setminus B \iff (x \in A) \wedge (x \notin B)$
- **Symetrická diference:** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \iff (x \in A) \oplus (x \in B)$
- **Potence (množina podmnožin):** $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$ ... množina všech podmnožin

1.1.3 Mohutnost

$|M|$ je počet prvků v množině M.

1.1.4 Uspořádané k-tice a Kartézský součin

- **Uspořádané k-tice:** $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- **Kartézský součin:** $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

1.2 Relace

1.2.1 Relace mezi množinami, relace na množině

- **Relace mezi množinami:** Relace $R \subseteq X \times Y$ je podmnožina kartézského součinu dvou množin X a Y.
- **Relace na množině:** Relace R na X je podmnožina kartézského součinu dvou identických množin, tj. $X = Y \implies R \subseteq X \times X$.

1.2.2 Operace s relacemi

- **Inverze:** Pro relaci R definujeme inverzní relaci R^{-1} předpisem $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
- **Skládání relace:** Nechť máme relace $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times Z$, potom složená relace, kde $T \subseteq X \times Z$, je $T = R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y : xRy \wedge ySz\}$

1.2.3 Funkce (zobrazení) a jejich druhy

Funkce (zobrazení): Funkce $f : X \to Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y) : xfy$.

- **prosté (injektivni):** Funkce $f : X \to Y$ je prostá $\iff$ pro všechna Y existuje nejvýše jedno $\forall x \in X$.
- **na (surjektivní):** Funkce $f : X \to Y$ je prostá $\iff$ pro všechna Y existuje alespoň jedno $\forall x \in X$.
- **vzájemně jednoznačné (bijektivní):** Funkce $f : X \to Y$ je bijektivní $\iff$ je *prostá* i *na*. *($\exists! x$)*

1.2.4 Vlastnosti relací

- **Reflexivita:** Relce R na X je *reflexivní* $\iff \forall x \in X : xRx$. *(Lze zapsat jako: $R \subseteq \triangle x$)*
- **Symetrie:** Relce R na X je *symetrická* $\iff \forall x, y \in X : xRy \iff yRx$. *(Také: $R = R^{-1}$)*
- **Antisymetrie:** Relce R na X je *antisymetrická* $\iff \forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \implies x = y$. *($R \cap R^{-1} \subseteq \triangle x$)*
- **Transitivita:** Relce R na X je *tranzitivní* $\iff \forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \implies xRz$. *(Také: $R \circ R \subseteq R$)*

1.2.5 Ekvivalence, ekvivalenční třída, rozklad množiny

- **Ekvivalence:** Relace R na X je ekvivalentní $\iff$ je *reflexivní, symetrická* a *tranzitivní.*
- **Ekvivalenční třída:** $R[x] = \{y \in X \mid xRy\}$ ... Pro relaci R ekvivalentní na X je $R[x]$ množina $\forall x, y \in X$ vzájemně ekvivalentních mezi sebou.
- **Rozklad množiny:** $\varphi = X \setminus R = \{R[x] \mid x \in X\}$... Nechť máme relaci R na X a rozklad množiny $\varphi = X \setminus R$. Potom existuje právě jedna ekvivalence na R.

1.3 Uspořádání

1.3.1 Uspořádání

Uspořádání Relace R na X je *uspořádání* $\iff$ je *reflexivní, antisymetrická* a *tranzitivní.*

- **Částečné:** Prvky nemusí být porovnatelné.
- **Lineární:** Uspořádání je *lineární* $\iff \forall x, y \in X : xRy \vee yRx$. Prvky jsou porovnatelné *(=trichomické).*
- **Ostré:** Uspořádání je *ostré* $\iff$ je *ireflexivní* - žádný prvek není v relaci sám se sebou.
- **Uspořádaná množina:** Taková dvojice (X, R), kde X je množina a R je uspořádání na ní.

1.3.2 Hasseův diagram a bezprostředního předchůdce

- **Hasseův diagram:** Graf znázorňující uspořádání. V zakreslování se nepoužívá, z důvodu přehlednosti, reflexivita a tranzitivita. Zakresluje se od spoda vzhůru vždy jen bezprostřední předchůdce.
- **Bezprostředního předchůdce:** Nechť X je ČUM, potom prvek $x \in X$ je *bezprostředním předchůdcem* prvku $y \in X$ právě tehdy, když $x \prec y \wedge \nexists t \in X$ splňující $x \prec t \prec y$.

1.3.3 Prvky

Nechť $(X, \preceq)$ je ČUM:

- **Největší:** potom $a \in X$ je *největší prvek*, pokud $\forall x \in X$ platí $a \succeq x$.
- **Nejmenší:** potom $a \in X$ je *nejmenší prvek*, pokud $\forall x \in X$ platí $a \preceq x$.
- **Maximální:** potom $a \in X$ je *maximální prvek*, pokud $\nexists x \in X$, pro které $x \succ a$.
- **Minimální:** potom $a \in X$ je *minimální prvek*, pokud $\nexists x \in X$, pro které $x \prec a$.

1.3.4 Řetězce

Nechť $(X, \preceq)$ je ČUM a $A \subseteq X$, potom pro

- **Řetězec** platí, že $\forall a, b \in A$ jsou porovnatelné.
- **Antiřetězec** platí, že $\nexists a, b \in A$, které jsou různé a porovnatelné.

1.3.5 Parametry alpha a omega

- **Parametr ω:** Výšku uspořádání v P: $\omega(P) = max\{P\}$. *(maximum z délek řetězců)*
- **Parametr α:** Šířka uspořádání v P: $\alpha(P) = max\{|A|; A$ nezávislá v $P\}$. *(maximum z délek antiřetězců)*

1.4 Kominatorické počítání

1.4.1 Klesající mocnina

Nechť N je n-prvková a X je x-prvková množina. *Klesající množina* $x^{\underline{n}}$ je rovna počtu všech prostých $f : N \to X$:

$$x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdot ... \cdot (x-n+1)$$

1.4.2 Charakteristická funkce podmnožiny

Nechť $A \subseteq X$, potom *charakteristická funkce podmnožiny* je zobrazení $C_A : X \to \{1, 0\}$.

$$(\forall x \in X) : C_A(X) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A \\ 0 & \text{pokud } x \notin A \end{cases}$$

1.4.3 Notace pro množinu všech k-prvkových podmnožin

Nechť N je množina. potom $\binom{N}{k}$ je *množina všech k-prvkových podmnožin* množiny N.

$$\binom{N}{k} = \{A \subseteq N : |A| = k\}$$

Zároveň platí:

$$\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k} = \binom{n}{k}$$

1.4.4 Kombinační číslo a Pascalův trojúhelník

- **Kombinační číslo (binomický koeficient):** Pro čísla $n, k > 0$ platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- **Pascalův trojúhelník:** Tabulka kombinačních čísel:

$n = 0$:					1				
$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		3		1	
$n = 4$:	1		4		6		4		1

1.5 Grafy

1.5.1 Graf, vrchol, hrana

Graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je vrchol a E je hrana. V je konečná neprázdná množina a E konečná neprázdná množina všech dvouprvkovych podmnožin V, tedy $E \subseteq \binom{V}{2}$.

1.5.2 Standardní grafy

- **Úplný graf** na n vrcholech značíme K_n, kde $V = [n]$ a $E = \binom{V}{2}$.
- **Prázdný graf** na n vrcholech značíme E_n, kde $V = [n]$ a $E = \emptyset$, t.j. nemá žádnou hranu.
- **Cestu** na n vrcholech značíme P_n, kde $V = [n_0]$ a $E = \{\{i-1, i\}; 1 \le i \le n\}$.
- **Kružnici** na n vrcholech značíme C_n, kde $V = [n_3]$ a $E = \{\{i, i+1\}, 1 \le i \le n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$.

1.5.3 Bipartitní a Úplně bipartitní graf

- **Bipartitní graf**, pokud $V = V_1 \cup V_2$, t.ž. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Hrany jsou mezi V_1 a V_2, neboli $\forall e \in E : |e \cap V_1| = 1$. Graf G je bipartitní, pokud lze V rozdělit na dvě disjunktní množiny V_1 a V_2 takové, že každá hrana z E obsahuje jeden bod z V_1 a druhý z V_2.
- **Úplný bipartitní graf** na $n+m$ vrcholech značíme $K_{n,m}$, kde $V = \{u_1, ..., u_n\} \cup \{v_1, ..., v_m\}$ *(=dvě partity)* a $E = \{\{u_i, v_j\}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$.

1.5.4 Isomorfismus grafů

Grafy G a H jsou *isomorfní*, pokud existuje *bijekce* mezi vrcholy:

$$\exists f : V(G) \to V(H), \text{ t.ž. } \{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

1.5.5 Stupeň vrcholu, Regulární graf a Skóre grafu

- **Stupeň vrcholu** v v grafu G je $deg_G(v) := |\{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}|$.
  Neboli počet hran grafu G, které obsahují hranu v.
- k**-regulární**, pokud pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\forall u \in V(G) : deg_G(u) = k$.
- **Skóre grafu** G je posloupnost stupňů všech vrcholů *(krom uspořádání)*.

1.5.6 Podgraf, indukovaný podgraf

- **Podgraf:** Graf H je *podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.
- **Indukovaný podgraf:** Podgraf H je *indukovaný*, pokud $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.

1.5.7 Cesta, kružnice, sled a tah v grafu

- **Cesta v grafu** G je podgraf isomorfní s nějakou cestou.
- **Kružnice v grafu** G je podgraf isomorfní s nějakou kružnicí, kde se vrcholy ani hrany neopakují.
- **Sled** z v_0 do v_n v grafu G je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n)$, pokud platí $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, kde v jsou vrcholy a e hrany. *Mohou se opakovat vrcholy i hrany.*
- **Tah** z v_0 do v_n v grafu G je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n)$, pokud platí $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, kde v jsou vrcholy a e *navzájem různé* hrany. *Mohou se opakovat pouze vrcholy, ne hrany.*

1.5.8 Souvislý graf, relace dosažitelnosti, komponenty souvislosti

- **Souvislý**, pokud $(\forall u, v \in V)$ existuje cesta z u do v. *Graf drží pohoromadě.*
- **Relace dosažitelnosti (ekvivalence)** v grafu G je binární relace $\sim$ na $V(G)$, t.ž. $u \sim v$, pokud existuje cesta z u do v.
- **Komponenty souvislosti** jsou podgrafy indukované třídami ekvivalence.

1.5.9 Matice sousednosti

Matice sousednosti $A(G)$ grafu G je čtvercová matice $n \times n$, pro kterou platí:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{pokud } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

1.5.10 Vzdálenost v grafu (grafová metrika)

Vzdálenost v souvislém grafu G je definována jako $d_G : V^2 \to \mathbb{R} : \forall u, v : d_G(u, v)$ je minimum z délek mezi u a v.

Pro metriku musí platit $\forall u, v, w \in V$:

- $d_G(u, v) \geq 0$ ... je minimum z délek cest, cesty jsou také nezáporné
- $d_G(u, v) = 0 \iff u = v$ ... nikde jinde (krom $d_G(u, u)$) vzdálenost nulová není
- $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) \leq d_G(w, v)$ ... vzdálenost mezi u a v je shora omezená mezi vzdáleností u, w a w, v
- $d_G(v, u) = d_G(u, v)$

1.5.11 Grafové operace: přidání/odebrání vrcholu/hrany, dělení hrany, kontrakce hrany

Grafové operace: přidání/odebrání vrcholu/hrany, dělení hrany, kontrakce hrany

- **Přidání vrcholu/hrany** značíme $G + v$/ $G + e$.
- **Odebrání vrcholu/hrany** značíme $G - v$/ $G - e$. Vpřípadě $G - v$ vytváříme indukovaný podgraf *(mažeme i hrany z tohoto vrcholu).* $G - v = G[V \setminus \{v\}]$
- **Dělení hrany** značíme $G\%e$. Vytvoření vrcholu uprostřed: $\{u, x\}$ a $\{x, v\}$.
$V' = V \cup \{v\}; E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{v, y\}\}$.
- **Kontrakce hrany** značíme $G.e$. Spojení (slepení) hran. $V' = (V \cup \{x, y\}) \cup \{z\}$
$E' = \{f \in E \mid f \cap e = \emptyset\} \cup \{f \setminus \{x, y\} \cup \{z\} \mid f \in E \wedge |f \cap e| = 1\}$

1.5.12 Otevřený a uzavřený eulerovský tah

Otevřený eulerovský tah z v_0 do v_n je takový tah, který obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu právě jednou. *Uzavřený* eulerovský tah je takový tah, kde $v_0 = v_n$.

1.5.13 Orientovaný graf, podkladový graf, vstupní a výstupní stupeň, vyváženost vrcholu

- **Orientovaný graf** uspořádaná dvojice (V, E), kde $E \subseteq V^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in V\}$.
Neboli relace na množině vrcholů bez diagonálních prvků.
- **Podkladový graf** $G = (V, E) \to G_0 = (V, E_0)$, pro $E_0 = \Big\{\{u, v\} \in \binom{V}{2} \mid (u, v) \in E \vee (v, u) \in E\Big\}$.
Neboli množina všech neuspořádaných dvojic vrcholů, kde v jednom nebo druhém pořadí je hrana.
- **Vstupní a výstupní stupeň:** Pokud existuje Eulerovský tah pro každy vrhol v, potom:

$$\underbrace{\#\text{hran z } V}_{\text{výstupní stupeň } deg^-(V)} = \underbrace{\#\text{hran do } V}_{\text{vstupní stupeň } deg^+(V)}$$

- **Vyváženost vrcholu:** Graf je *vyváženy*, pokud platí $deg^-(V) = deg^+(V)$.

1.5.14 Silná a slabá souvislost orientovaných grafů

- **Silná souvislost**, pokud pro $\forall u, v \in V$ existuje orientovaná cesta z u do v.
- **Slabá souvislost**, pokud podkladový graf *(=symetrie grafu)* je souvislý.

1.6 Stromy

1.6.1 Stromy, les, list

- **Strom** je souvislý graf bez kružnic. *(acyklicky graf)*
- **Les** je acyklicky graf. Jeho komponenty souvislosti jsou stromy.
- **List** je vrchol stupně 1.

1.6.2 Kostra grafu

Kostra grafu G je podgraf T, tedy $T \subseteq G$ t.ž.: $V(T) = V(G) \wedge T$ je strom.

1.7 Rovinné kreslení grafů

1.7.1 Rovinné nakreslení grafu a jeho stěny (neformálně)

Pokud existuje nakreslení do roviny bez křížení hran, tak je graf G rovinný.

1.7.2 Rovinný graf a topologický graf

- **Rovinný graf** je takový graf, pro nějž existuje nějaké nakreslení v rovině.
- **Topologický graf:** uspořádaná dvojice (graf, nakreslení).

1.7.3 Stereografická projekce

Překreslení grafu z roviny na sféru a naopak.

1.8 Barvení grafů

1.8.1 Obarvení grafu k barvami a barevnost

- **Obarvení grafu** k **barvami** je $c : V(G) \to [k]$ tak, že kdykoli $\{x, y\} \in E(G)$, pak $c(x) \neq c(y)$.
- **Barevnost** $\chi(G)$ je nejmenší k takové, že existuje k-obarvení G.

1.9 Pravděpodobnost

Ω je množina elementárních jevů; $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ je podmnožina elementárních jevů;

Pravděpodobnost P je funkce $P : \mathcal{F} \to [0,1] = \begin{cases} P(A) = 1 & \text{jev jistý} \\ P(A) = 0 & \text{jev možný} \end{cases}$

1.9.1 Pravděpodobnostní prostor diskrétní, konečný, klasický

- **Diskrétní:** trojice $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde Ω je konečná nebo spočetná, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$; $P(\Omega) = 1$; $P(A) = \sum\limits_{w \in A} P(\{w\})$.
- **Konečný:** Diskrétní pravděpodobnostní prostor, kde Ω je konečný.
- **Klasický:** Konečný pravděpodobnostní prostor, kde $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

1.9.2 Jev elementární, jev složený, pravděpodobnost jevu

- **Elementární jev:** Všechny výsledky nějakého pravděpodobnostního experimentu. Značíme jako Ω.
- **Složený jev:** Takový jev, který není elementární. Složený jev nastane $\iff$ nastane některý z elementárních jevů v něm obsažený.
- **Pravděpodobnost jevu** udává, jakou máme šanci, že daný jev nastane.

1.9.3 Podmíněná pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost, že nastal jev A za podmínek, že nastal jev B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.9.4 Jevy nezávislé a po k nezávislé

- **Nezávislé:** Jevy A a B jsou nezávislé $\iff$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- **Po** k **nezávislé:** Jevy $A_1, A_2, ..., A_n$ jsou *po dvou nezávislé* $\iff$ $\forall i, j : i \neq j \implies A_i, A_j$ jsou nezávislé.

  Neboli jsou nezávislé, pokud pro $\forall I \subseteq [n]$ platí: $P\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) = \prod\limits_{i \in I} P(A_i)$.

1.9.5 Náhodná veličina

Náhodná veličina (proměnná) je funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

1.9.6 Střední hodnota

Střední hodnota náhodné veličiny X je $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{w \in \Omega} P(\{w\}) \cdot X(w)$.

1.9.7 Indikátor náhodného jevu

Indikátor náhodného jevu A je náhodná veličina $I_A : \Omega \to \{0, 1\}$.

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } w \in A \textit{ (pokud jev nastal)} \\ 0 & \text{pokud } w \notin A \textit{ (pokud jev nenastal)} \end{cases}$$

1.9.8 Markovova nerovnost

Nechť X je nezáporná náhodná veličina a $\forall t \geq 1$, potom platí: $P[X \geq t \cdot \mathbb{E}(X)] \leq \frac{1}{t}$

2 Věty a důkazy

2.1 Úvod

2.2 Relace

2.2.1 Vztah mezi ekvivalencemi a rozklady

Věta: Pro každou ekvivalenci R na X platí:

(i) $\forall x \in X : R[x] \neq \emptyset$

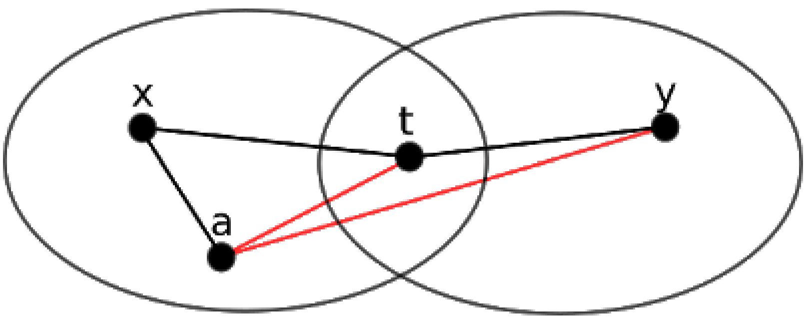
(ii) $\forall x, y \in X : R[x] = R[y]$ nebo (XOR) $R[x] \cap R[y] = \emptyset$

(iii) Třídy ekvivalence jednoznačné určují (popisují) relaci R.

Proof.

(i) Množina $R[x]$ vždy obsahuje prvek x, protože R je *reflexivní.* $xRx \implies x \in R[x] \implies R[x] \neq \emptyset$

(ii) Chceme ukázat, že $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset \implies R[x] \subseteq R[y]$.
Víme, že $\exists t \in R[x] \cap R[y]$ a chceme, aby $\forall a : a \in R[x] \wedge a \in R[y]$.
Víme tedy, že t je průnikem, proto platí $xRt; tRx$ i $yRt; tRy$ a zároveň víme, že $aRx; xRa$.
Nyní za pomoci tranzitivity zjistímě, že aRt a opět tranzitivitou $aRy \implies a \in R[y]$.



(iii) Triviálně: $xRy \iff \{x, y\} \subseteq R[x]$. Neboli, když chci zjistit, jestli je xRy, tak stačí najít $R[x]$ obsahující y a podívat se, jestli je tam i x.

□

2.3 Uspořádání

2.3.1 Konečná neprázdná uspořádaná množina má minimální a maximální prvek

Věta: Každá konečná neprázdná ČUM má minimální a maximální prvek.

Proof. Zvolíme libovolné $x_1 \in X$:

- x_1 je minimální - **hotovo**
- $\exists x_2 < x_1$, s ním pokračuji dál: $x_1 > x_2 > ... > x_t$

Pokud $t > |x|$, pak $\exists i, j, i \neq j$ t.ž. $x_i = x_j$. Platí tedy $x_1 > x_{i+1} > x_{j+1} > ... > x_j = x_i$. Za pomoci tranzitivity určím $x_i > x_j = x_i$, získal jsem tím pádem $x_i > x_i$, což je **spor**.

Neboli: Tvořím posloupnost. Začnu lib. prvkem, v každém kroku vezmu poslední přidaný prvek do posloupnosti a podívám se, jestli má minimum. Pokud ne, přidám ho do posloupnosti. Posloupnost musí být konečná, protože jinak jsem přidal z množiny do posl. nějaký stejný prvek. Pokud se vyskytne stejný prvek, tak tranzitivita a následně spor. □

2.3.2 O Dlouhém a Širokém

Věta: Nechť $(X, \preceq)$ je konečná ČUM, potom $\alpha(X, \preceq) \cdot \omega(X, \preceq) \geq |X|$

Proof. Konstruujeme vestvy $x_1, x_2, ..., x_i$, kde $x_1 = \min X$. **Krok:** Máme-li $x_1, ..., x_i$, nejdříve se podíváme, co zbylo:

$$Z_i = X \setminus \left(\bigcup_{j<i} X_j \right) \implies \begin{cases} Z_i = \emptyset & \text{hotovo} \\ Z_i \neq \emptyset & X_{i+1} = \text{min prvky } Z_i \end{cases}$$

Z toho nám plynou 3 důsledky:

1. $\forall i : X_i$ je antiřetězec $\implies |X_i| \leq \alpha$ *(= velikost každé vrstvy je nejvýš α)*
2. $\exists$ řetězec $\{q_1, ..., q_n\}$ t.ž. $\forall i : q_i \in X_i \implies k \leq \omega$ *(= počet vrstev je nejvýš ω)*
   podívám se, kvůli kterému prvku je náš prvek ve své vrstvě a ne nějaké nižší, neboli $q_k \in X_k$ libovolně. Máme $q_k, q_{k-1}, ..., q_i$, kde $q_i \notin X_{i-1} \implies \exists q_{i-1} \in X_{i-1} : q_{i-1} < q_i$.
3. $X_1, ..., X_k$ jsou rozklad $X \implies |X| = \sum_i |X_i| \leq \alpha \cdot \omega$

□

2.3.3 Erdősovo-Szekeresovo lemma o monotónních podposloupnostech

Věta: Nechť $x_1, ..., x_{n^2+1}$ je posloupnost navzájem různých čísel, potom $\exists$ vybraná podposloupnost délky $n+1$, která je ostře monotónní *(=klesající nebo rostoucí)*.

Proof. Nadefinujeme si relaci $\leq$ na množině $\{1, ..., n^2+1\}$ pro $i \leq j \equiv i \leq j \wedge x_i \leq x_j$ a vypozorujeme, že se jedná o částečné uspořádání. Potom *řetězec* odpovídá rostoucí podposloupnosti a *antiřetězec* klesající podposloupnosti. Můžeme tedy použít *Dlouhého a širokého*:
$\alpha \cdot \omega \geq n^2 + 1 \implies$ nemůže nastat $\alpha \leq n \wedge \omega \leq n \implies \alpha \geq n+1 \vee \omega \geq n+1$. □

2.4 Kombinatorické počítání

2.4.1 Počet funkcí mezi množinami

Věta: Nechť A je n-prvková a B je m-prvková množina, potom počet funkcí mezi A a B je m^n.

Proof. Určujeme $\#f : A \to B$.
Máme množinu A o velikosti $|A| = n$ a množinu B o velikosti $|B| = m$. Množina A obsajuje prvky $a_1, a_2, ..., a_n$, množina B prvky $b_1, b_2, ..., b_m$. Zobrazujeme jednotlivě prvky a na prvky z množiny B.
$f(a_1)$ můžeme zobrazit m možnostmi, $f(a_2)$ také m možnostmi, ..., $f(a_n)$ také m možnostmi. Z čehož nám vyplývá:

$$\#f : [n] \to [n] = \underbrace{m \cdot m \cdot ... \cdot m}_{n\text{-krát}} = m^n$$

□

2.4.2 Počet prostých funkcí mezi množinami

Věta: Nechť A je n-prvková a B je m-prvková množina, potom počet prostých funkcí mezi A a B je $m^{\underline{n}}$.

Proof. Určujeme $\#f : [n] \to [n]$ prostých.
$f(1)$ zobrazíme m možnostmi, $f(2)$ už $m-1$ možnostmi, ..., $f(n)$ jen $m-n+1$ možnostmi. Z čehož nám vyplývá:

$$\#f : [n] \to [n] \text{ prostých } = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot (m-n+1) = m^{\underline{n}} \text{ ...\textit{klesající mocnina}}$$

□

2.4.3 Počet všech podmnožin

Věta: Počet všech n-prvkových podmnožin je roven 2^n, tedy $\left|2^X\right| = 2^{|X|}$.

Proof. Snažíme se ukázat $\left|2^{[n]}\right| = 2^n$.
Podmnožině $A \subseteq X$ přiřadíme funkci $C_a : X \to \{0, 1\}$. 0 pokud $x \notin A$, 1 pokud $x \in A$.
Spárovali jsme podmnožiny s *charakteristickými funkemi*, neboli našli jsme bijekci mezi množinou všech podmnožin X a množinou všech funkcí $C_a : X \to \{0, 1\}$.
Máme-li bijekci mezi dvěma množinami, pak mají obě množiny stejný počet prvků $\implies \left|2^{[n]}\right| = 2^n$. □

2.4.4 Počet podmnožin sudé a liché velikosti

Věta: Počet podmnožin sudé a liché velikosti je stejný.

Proof. Nechť máme množinu $[n]$, kde $n > 0$.
Definujme si dvě množiny: $S = \{A \subseteq [n] : |A| \text{ je sudá}\}$ a $L = \{A \subseteq [n] : |A| \text{ je lichá}\}$. Jejich sjendnocením získáme množinu všech prvků, neboli $S \cup L = 2^{[n]} \iff |S| + |L| = 2^n$.
Snažíme se ukázat $|S| = |L| = 2^{n-1}$. Určuji tedy bijekci mezi S a L:
Zvolím libovolné $a \in [n]$ a definuji zobrazení $f : 2^{[n]} \to 2^{[n]}$. Následně přidám a do A pokud v ní není, nebo ho naopak odeberu, pokud v ní je.

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{pokud } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{pokud } a \in A \end{cases}$$

□

2.4.5 Počet permutací na množině

Věta: Pokud A je konečná množina, tak permutace množiny A je bijekce z A do A

Proof.

(a) Jedná se o zobrazení množiny na stejnou množinu, jedná se o bijekci.
Protože se jedná o bijekci, stačí nám spočítat, $\#f : [n] \to [n]$.

$$n^{\underline{n}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = n! \text{ ...\textit{faktoriál}}$$

(b) Kolik existuje způsobů, jak očíslovaz prvky nějaké množiny $[n]$ čísly od 1 do n?
Počítáme bijekci mezi 1 až n do 1 až n, takže počítáme počet prostých funkcí $\implies n!$

□

2.4.6 Počet uspořádaných k-tic bez opakování a k-prvkových podmnožin

Věta: Počet uspořádaných k-tic bez opakování a k-prvkových podmnožin je roven $\binom{n}{k}$.

Proof. Nechť X je množina, potom $|X^k| \iff f : [k] \to X$.

(a) **Bez opakování:** $f[k] \to X$, neopakujeme, takže je prostá:

$$\#f : [k] \to X \text{ prosté } \implies |X|^{\underline{k}}$$

(b) **Podmnožiny *(= neuspořádané k-tice)*.** Určíme k-tice bez opakování za pomoci *počítání 2 způsoby*:

  (1) $U(k, n)$ je uspořádaná k-tice z bodu (a).
  (2) $N(k, n)$ je odvození neuspořádaných k-tic.

$$N(k,n)k! = U(k,n) = n^{\underline{k}}$$
$$N(k,n) = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k^{\underline{k}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot ... \cdot 1} = \binom{n}{k} \text{ ...\textit{binomické číslo}}$$

□

2.4.7 Základní vlastnosti kombinačních čísel

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$
$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

2.4.8 Binomická věta

Věta: $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Proof. Představeme si $\underbrace{(x+y) \cdot (x+y) \cdot ... \cdot (x+y)}_{n\text{-krát}}$. Když z toho vybereme jednotlivá x a y, např.:
$x \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y ... = x^{n-k} y^k$ ... y-nů mám celkem y^k, takže x-ú musím mít celkem zbylých x^{n-k}.
Dále se můžeme ptát, kolik existuje členů pro konkrétní k. A protože z právě k závorek jsme si vybrali y, tak si z právě n závorek musíme vybrat k takových, ve kterých použijeme x. $\implies$ máme $\binom{n}{k}$ možností, jak je vybrat. □

2.4.9 Princip inkluze a exkluze

Věta 1: Pro konečné A_1 až A_n platí:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Proof. #1. Nechť $A := \bigcup_i A_i$
Levá i pravá strana jsou součty velikostí nějakých množin, takže se můžeme ptát, *kolikrát levé a pravé straně přispěje každý prvek* $a \in A$. Víme, že k levé přispěje jednou, chceme dokázat, že k pravé také jednou. Zadefinujme si kolikrát se započítá $\#i : a \in A_i = t$: $\underbrace{\text{Pro } k > t \text{ ... 0-krát; Pro } k \leq t \text{ ... } (-1)^{k+1}\binom{t}{k}\text{-krát}}_{\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1}\binom{t}{k} = 1}$

I na pravé straně tedy přispěje právě jednou. □

Věta 2: Pro konečné A_1 až A_n platí:

$$\left| \bigcup_{i=1} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Proof. #2.
Nechť $A := \bigcup_i A_i$ a nechť pro $X \subseteq A$ platí $C_X : A \to \{0, 1\}$ ... *charakt. funkce.* Nechť platí vztah:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$$

Operace char. fce: $C_X \cdot C_Y = C_{X \cap Y}$; $C_{\overline{X}} = 1 - C_X$; $1 - C_{X \cup Y} = (1 - C_X)(1 - C_Y)$; $\sum_{a \in A} C_X(a) = |X|$
Nyní dosadíme do původní rovnice $x_i = C_{A_i}$:

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{n} (1 - C_{A_i})}_{} = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\prod_{i \in I} C_{A_i}}_{}$$

$$1 - C_{\bigcup_i A_i} = \left(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} C_{\bigcap_{i \in I} A_i} \right) + 1$$

$$C_{\bigcup_i A_i} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} C_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

$$\underbrace{\sum_{a \subseteq A} C_{\bigcup_i A_i}}_{} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \underbrace{\sum_{a \subseteq A} C_{\bigcap_{i \in I} A_i}}_{}$$

$$\left| \bigcup_{i=1} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

□

2.4.10 Odhad faktoriálu

Věta: $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Nejprve uděláme několik menších úprav, umocníme $\left(n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right)^2$ a vyjádříme:

$$(n!)^2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot n = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdot ... \cdot (n \cdot 1)$$
$$n! = \underbrace{\sqrt{1 \cdot n} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{3 \cdot (n-2)} \cdot ... \cdot \sqrt{n \cdot 1}}_{\sqrt{i(n-i+1)}}$$

Nyní budeme dokazovat dvě nerovnosti, ve kterých $n! = \sqrt{i(n-i+1)}$:

1. *Proof.* $\sqrt{i(n-i+1)} \geq \sqrt{n} = n^{1/2}$, umocníme na 2., takže chceme, aby $i(n-i+1) \geq n$:
   - Pokud se $i = n \vee i = 1$, potom $n \geq n$.
   - Pokud se $i \neq 1, n$, tak počítám součin dvou čísel, jedno je větší (max) a druhé menší (min).
     - $\max \geq n/2$ ... nejmenší může být, když se potkají uprostřed
     - $\min \geq 2$ ... nemůže být 1 (podmínka)

     Takže součin dvou čísel: $\max \cdot \min \geq n/2 \cdot 2 = n$

   □

2. *Proof.* Za pomoci *AG nerovnosti*: $\forall x, y \geq 0 : \quad \underbrace{\sqrt{x \cdot y}}_{\text{geometrický průměr}} \quad \leq \quad \underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\text{aritmetický průměr}}$.

   Tvrdíme, že podle AG nerovnosti platí: $\sqrt{i(n-i+1)} \leq \frac{\cancel{i}+n-\cancel{i}+1}{2} = \frac{n+1}{2}$:

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$2ab \leq a^2 + b^2$$
$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

   Při dosazení $a = \sqrt{x}$ a $b = \sqrt{y}$, získáme $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2} \implies$ platí $n! = \sqrt{i(n-i+1)} \leq \frac{n+1}{2}$. □

2.4.11 Odhad kombinačního čísla

Věta: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq C(n,k) \leq n^k$

Nejprve binomické číslo rozdělím na $\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot...\cdot 1}$ a opět budeme dokazovat dvě nerovnosti:

1. *Proof.* Můžeme si všimnout, že každé číslo v čitateli je nejvýše n a každé číslo ve jmenovateli je alespoň 1. Proto $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot...\cdot 1} \leq \left(\frac{n}{1}\right)^k = n^k$ □

2. *Proof.* Rozdělíme výraz na jednotlivé zlomky: $\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{1}$ a u každého dokážeme, že je $\geq \frac{n}{k}$. Dokazujeme tedy, že z leva do prava zlomky rostou *($\frac{n}{k}$ je nejmenší)*.

$$\frac{n}{k} \leq \frac{n-1}{k-1}$$
$$n \cdot (k-1) \leq k \cdot (n-1)$$
$$nk - n \leq nk - k$$
$$n \geq k$$

   Výraz je skutečně rostoucí. □

2.4.12 Odhad prostředního kombinačního čísla

Věta: $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$. Čísla rostou, v prostřed je maximum, následně zase klesají *(Pascalův trojúhelník)*.

1. *Proof.* $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.
   Uvědomme si, že když máme n-tý řádek Pascalova trojújelníku, tak je jeho součet 2^n. V našem případě je to $2n$-tý řádek, takže jeho součet je $2^{2n} = 4^n$. □

2. *Proof.* $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}$.
   Když máme posloupnost čísel, tak platí max $\geq$ aritmetický průměr $\geq$ min. Naše číslo je největší a leží přesně v prostřed, takže musí být $\geq$ AP řádku.

   Součet našeho $2n$-tého řádku je 4^n, součet čísel na řádku je $2n+1$. Celkem tedy platí $\frac{4^n}{2n+1}$ □

2.5 Grafy

2.5.1 Vztah mezi součtem stupňů a počtem hran, princip sudosti

Věta: V grafu $G = (V, E)$ platí:

$$\sum_{v \in V} deg_G(V) = 2|E|$$

Proof. Sečteme-li stupě, každou hranu započítáme dvakrát (jednou za každý její konec). Konec hran: počítáme dvojice (v, e), kde $v \in V$ a $e \in E$, t.ž.: $v \in e$. □

Důsledek: počet vrcholů lichého stupně je sudý

2.5.2 Věta o skóre

Věta: Posloupnost $D = (d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n)$ pro $n \geq 2$ je skóre grafu $\iff$ $0 \leq d_n \leq n - 1 \land$ posloupnost $D' = d'_1, d'_2, ..., d'_{n-1}$ je skóre grafu, kde $d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n \end{cases}$.

Proof. ... □

2.5.3 Dosažitelnost sledem je totéž jako dosažitelnost cestou

Věta: Mezi vrcholy u, v vede sled $\iff$ mezi nimi vede cesta.

1. *Proof.* $\Longleftarrow$:
   Triviálně, každá cesta je sledem. □

2. *Proof.* $\Longrightarrow$:
   Postupně budu ze sledu vypouštět smyčky. Opakujeme, dokud se nezbavíme všech opakujících se vrcholů.
   Formálně: Nechť $\exists$ sled z u do v... Nyní :
   Sled: $v_0, e_1, v_1, ..., e_i, \underbrace{v_i, e_{i+1}, ..., e_j, v_j}_{smyčka}, e_{j+1} ..., e_n, v_n$, kde $v_i = v_j$ pro nějaké $i < j$. Odstraníme smyčku:
   Sled: $v_0, e_1, v_1, ..., e_i, v_i, e_{j+1}, ..., e_n, v_n$, je kratší, je bez smyček, je cestou
   Opakujeme, dokud existují duplicitní vrcholy. □

2.5.4 Počet sledů délky k lze získat z k-té mocniny matice sousednosti

Věta: Pro $A = A(G)$ grafu G na vrcholech $v_1, ..., v_n$ platí:

$$\forall i, j : (A^k)_{i,j} = \#\text{ sledů délky } k \text{ z } v_i \text{ do } v_j.$$

Proof. Matematickou indukcí podle k.

(i) pro $k = 0$ a $k = 1$: Triviálně, sled délky 0 je stejný vrchol; sled délky 1 je jedna hrana.

(ii) pro $k - 1 \to k$: Zapíšeme $A^k = A^{k-1} \cdot A$.

$$\begin{aligned} A^k_{i,j} &= \underbrace{\sum_{t=1}^{n} A^{k-1}_{i,t}}_{\#\ sledů\ délky\ k-1\ z\ v_i\ do\ v_t} \cdot \underbrace{A_{t,j}}_{[\{v_t, v_j\} \in E(G)]} = \\ &= \sum_{\substack{t \\ \{v_t, v_j\} \in E(G)}} \#\ sledů\ délky\ k-1\ z\ v_i\ do\ v_t = \\ &= \#\text{ sledů délky } k \text{ z } v_i \text{ do } v_j \end{aligned}$$

□

2.5.5 Trojúhelníková nerovnost pro vzdálenost

Věta: $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$

Proof. Z *věty 2.5.3.* Sled nemůže být kratší než nejkratší cesta. □

2.5.6 Věta o existenci uzavřeného eulerovského tahu

Věta: Graf je Eulerovský $\iff$ má uzavřený eulerovský tah, je souvislý a má všechny vrcholy sudé ($\forall v \in V(G)$: $deg_G(V)$ je sudý)

1. *Proof.* $\implies$:
   Je souvislý: z každého vrcholu do každého se dá dostat za pomoci eulerovského tahu. Tah je případem sledu a když je někde sled, je tam i cesta $\implies \forall u, v$ existuje cesta mezi u a v.
   Je sudý: Hrany sousedící s V rozdělíme do disjunktních dvojic $\implies deg_G(V)$ je sudý. □

2. *Proof.* $\impliedby$:
   Nechť T je jeden z nejdelších tahů v G.
   (a) *T je uzavřený*: Kdyby nebyl, vezmeme v (krajní vrchol tahu)... v je navšíven lichým počtem hran tahu $\implies \exists f \in E$ incidentní s v t.ž. $f \notin T \implies f.T$ je ale delší tah. ↯
   (b) *$\forall u, v$ vrcholy na T: pokud $\{u, v\} \in E(G)$, pak $\{u, v\} \in T$...* Víme, že tah je uzavřený. Kdyby existovala nějaká hrana (mezi u, v), která neleží na tahu, tak ji povedu ke sporu. Vím, že nejdelší tah je uzavřený a že prochází alespoň jednou u. Při jednom průchodu u tah rozpojím a přidám hranu $\{u, v\}$. Tím jsem však vytvořil tah, který je delší než původní nejdelší T. ↯
   (c) *Každý vrchol $v \in V(G)$ leží na tahu T...* Nechť vrchol v neleží na tahu T. Vezmu libovolný vrchol u a ze souvislosti plyne, že $\exists$ cesta mezi u a v. Aby ale existoval, musela by existovat hrana, která spojuje v a tah T, ta ale existovat nemůže, protože bychom přidali hranu a zvětšili bychom T. ↯

   □

2.5.7 Uzavřené eulerovské tahy v orientovaných grafech

Věta: Pro orientovaný graf G je ekvivalentní: $\begin{cases} (i) \text{ je vyvážený a } \textit{slabě} \text{ souvislý} \\ (ii) \text{ je eulerovský} \\ (iii) \text{ je vyvážený a } \textit{silně} \text{ souvislý} \end{cases}$.

Proof. Postupně dokazujeme $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)$:

$(i) \implies (ii)$: Z důkazu o existenci uzavřeného eulerovského tahu

$(ii) \implies (iii)$: Máme-li uzavřený eulerovský tah, tak je ve dvojicích vždy stejně hran dovnítř a hran ven. Je eulerovský, takže z něj mohu vybrat podtah z u do v i z v do u. *(věta 2.5.3)*

$(iii) \implies (i)$: Silná souvislost implikuje slabou

□

2.6 Stromy

2.6.1 Lemma o koncovém vrcholu

Věta: Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň jeden list.

Proof. Nechť C je nejdelší cesta a vrcholy a a z jsou listy.
Pro spor předpokládejme, že

1. $\exists x \notin C$, ale když ho propojíme s a, vznikne nám delší cesta. ↯
2. *Hrana vede do vrcholu x', který už na cestě leží.* V takovém případě by nastala kružnice. ↯

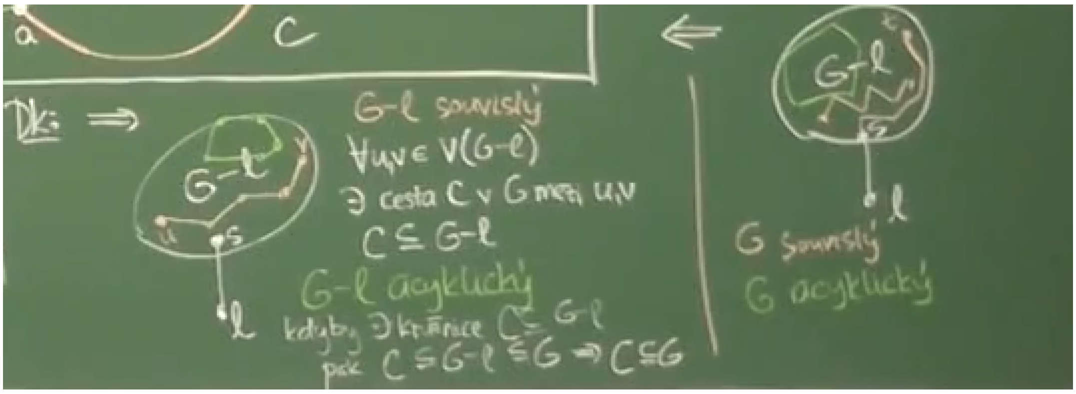
□

2.6.2 Je-li l list grafu G, pak G je strom, právě když G-l je strom.

Věta: Pro graf G s listem l: G je strom $\iff G - l$ je strom.

1. *Proof.* $\implies$ je-li G souvislý acyklický, pak je i $G - l$ souvislý acyklický.
   Je souvislý: $\forall u, v \in V(G - l) \exists$ cesta C v G mezi u, v, takže $C \subseteq G - l$
   Je acyklický: Kdyby $\exists$ kružnice $C \subseteq G - l \subseteq G \implies C \subseteq G$ □

2. *Proof.* $\Longleftarrow$ je-li $G - l$ souvislý acyklický, pak je i G souvislý acyklický.
   Je souvislý: Dokazujeme, že mezi každými vrcholy G existuje cesta. Pokud to jsou vrcholy $\neq l$, pak jsou to vrcholy, které už byly v $G - l$, tím pádem mezi nimi byla cesta, která zůstala až do G. *Přidáním listu nerozbiju cestu.* Dokazujeme, že $\exists$ cesty mezi l a ostatními vrcholy v $G - l$. Například chceme z l do t: využijeme $G - l$ souvislosti a bodu s, který propojíme s bodem $t \implies \exists$ cesta.
   Je acyklický: Kdybychom měli kružnici v G, kde není l, tak taková byla i v $G - l$. Tam být ale nemůže, protože l má stupeň 1 a v kružnici musí mít každý vrchol stupeň ≤ 2. □



2.6.3 Pět ekvivalentních charakteristik stromu

Věta: Pro graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) G je souvislý a acyklický *(=strom)*

(ii) $\forall u, v \in V(G)$ $\exists!$ cesta v G mezi u a v *(=jednoznačná souvislost)*

(iii) G je souvislý a $\forall e \in E(G) : G - e$ není souvislý *(=minimální souvislost)*

(iv) G je acyklický a $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E : G + e$ má cyklus *(=maximálně acyklický)*

(v) G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$ *(=Eulerova formule)*

Proof. Matematickou indukcí podle k.

$(i) \implies (ii)$: indukcí odtrháváním listů

$(i) \implies (iii)$: Máme-li uzavřený eulerovský tah, tak je ve dvojicích vždy stejně hran dovnitř a hran ven. Graf je vyvážený a silně souvislý, na tahu leží každé dva vrcholy u, v. Je eulerovský, takže z něj mohu vybrat podtah z u do v i z v do u.

$(i) \implies (iv)$: Z důkazu o existenci uzavřeného eulerovského tahu

$(i) \implies (v)$: Z důkazu o existenci uzavřeného eulerovského tahu

□

2.6.4 Graf má kostru, právě když je souvislý.

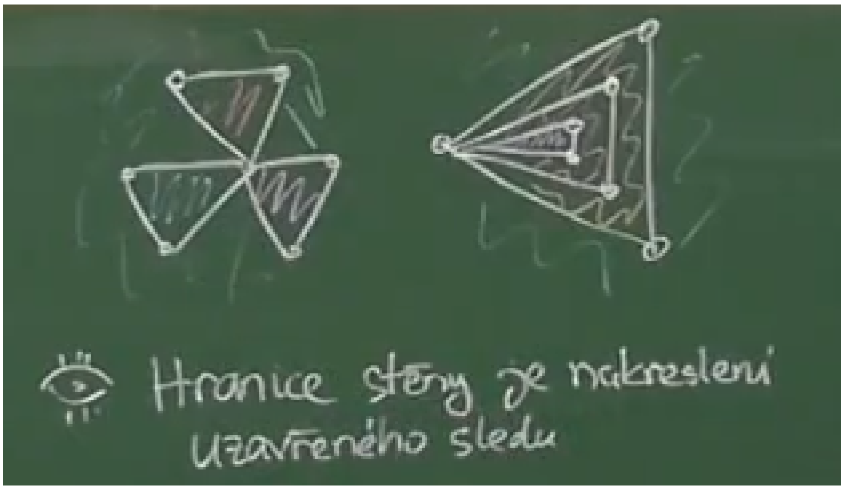
Věta: Graf G má kostru $\iff$ G je souvislý.

1. *Proof.* $\implies$
   Má-li graf kostru, je kostra strom, ve stromu jsou každé dva vrcholy spojené cestou. Cesta je podgrafem G, takže G je souvislý. □

2. *Proof.* $\Longleftarrow$
   Pokud je G souvislé, tak je buď acyklické, nebo v něm jsou nějaké cykly. Mužeme si vybrat libobolnou hranu na cyklu a tu smazat (opakujeme konečně krát, dokud jsou v grafu cykly). Dostaneme tedy graf, který je stále souvislý a který neobsajuje cykly, takže je strom. *(Odebíráním hrany vždy dostaneme podgraf původního grafu, takže je strom).* □

2.7 Rovinné kreslení grafů

2.7.1 Hranice stěny je nakreslením uzavřeného sledu (bez důkazu).



2.7.2 Graf jde nakreslit do roviny, právě když jde nakreslit na sféru.

Proof. Stereografickou projekcí. Viz 3.7.2. □

2.7.3 Kuratowského věta (bez důkazu)

Věta: Graf G je nerovinný $\iff$ G obsahuje podgraf isomorfní s dělením K_5 nebo $K_{3,3}$.

2.7.4 Eulerova formule pro souvislé rovinné grafy (v+f=e+2)

Věta: Nechť G je souvislý graf nakreslený do roviny, $v := |V(G)|$, $e := |E(G)|$, $f :=$ #stěn nakreslení. Potom platí $v + f = e + 2$.

Proof. Zvolíme v pevně a pak indukcí podle e.

(i) $e = v - 1$ (G je strom), $f = 1$:

$$v + 1 = v - 1 + 2$$

(ii) $e - 1 \to e$: mějme graf G s e hranami. Nechť λ je hrana na kružnici v G.
Potom $G' = G - \lambda$, $v' = v$, $e' = e - 1$, $f' = f - 1$. Nyní použijeme indukční předpoklad:

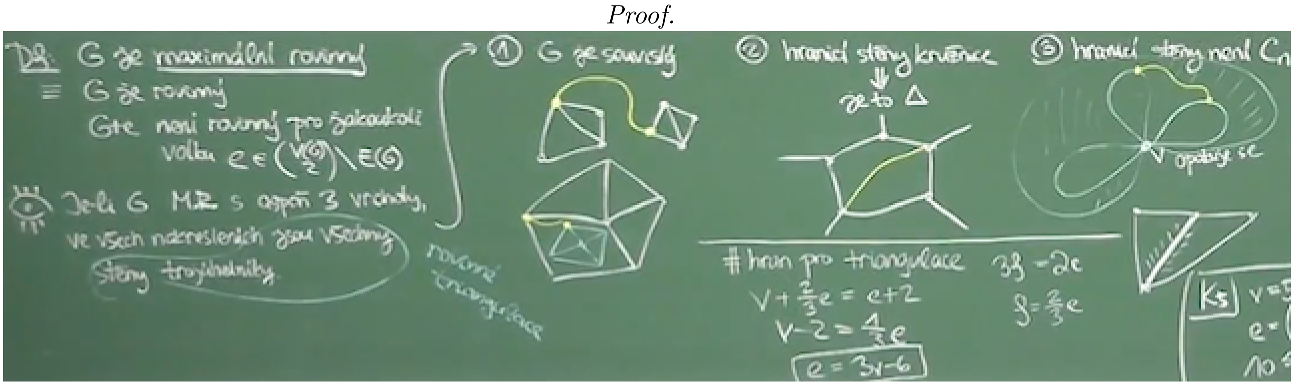
$$v' + f' = e' + 2$$
$$v + f - \cancel{1} = e - \cancel{1} + 2$$
$$v + f = e + 2$$

□

2.7.5 Maximální rovinný graf je triangulace.

Věta: Je-li G maximální rovinný s alespoň 3 vrcholy, pak jsou ve všech nakresleních všechny stěny trojúhelníky.

Proof.



□

2.7.6 Maximální počet hran rovinného grafu

Věta: V každém rovinném grafu s alespoň 3 vrcholy je $|E| \leq 3|V| - 6$.

Proof. Doplním do G hrany, až získám maximální rovinný graf G'. Takže $v' = v$, $e' \geq e$. Nyní jen dosadíme:

$$e' = 3v' - 6 \implies e \leq 3v - 6$$

□

2.7.7 V rovinném grafu existuje vrchol stupně nejvýše 5.

V rovinném grafu existuje vrchol stupně nejvýše 5. Vychází z věty: Průměrný stupeň vrcholu v rovinném grafu je < 6. Což dokážeme:

Proof. $\sum_{\lambda} deg(\lambda) = 2e \leq 6v - 12$. Určím průměr: $\frac{\sum_\lambda deg(\lambda)}{v} = \frac{2e}{v} \leq \frac{6v-12}{v} \implies e < 6$.
Z toho plyne důkaz pro naši větu: Kdyby všechny vrcholy měly stupeň alespoň 6, tak je průměr talé alespoň 6... Což není, je ostře menší.

□

2.7.8 Počet hran a vrchol nízkého stupně v rovinných grafech bez trojúhelníků

Proof. Počítáme dvěma způsoby: $4f \leq 2e \implies f \leq \frac{1}{2}e$:

$$\begin{aligned} v + \frac{1}{2}e &\geq e + 2 \\ v - 2 &\geq \frac{1}{2}e \\ e &\leq 2v - 4 \end{aligned}$$

Průměrný stupeň je tedy $< 4 \implies$ existuje vrchol stupně maximálně 3. □

2.8 Barvení grafů

2.8.1 Graf má barevnost nejvýše 2, graf je bipartitní, graf neobsahuje lichou kružnici.

Tvrzení: $\chi(G) \leq 2 \iff G$ je bipartitní.

1. *Proof.* $\impliedby$ Triviálně, je-li bipartitní, jeho obarvení je nejvýše 2.  □
2. *Proof.* $\implies$:
   Když máme graf obarvitelný 2 barvami, tak ty 2 barvy jsou partity. Když do jedné partity uložíme vrcholy s jednou barvou a druhou, tak zase musí jít hrany napříč partitami. □

Věta: $\chi(G) \leq 2 \iff G$ nemá lichou kružnici.

1. *Proof.* $\implies$ Triviálně. □
2. *Proof.* $\impliedby$:
   Kdyby byl nesouvislý, obarvíme po komponentách.
   $T :=$ kostra grafu G, $\exists c : V(G) \to \{1, 2\}$ obarvení T. Kdyby $\exists\{x, y\} \in E(G) \setminus E(T)$ a $c(x) = c(y)$:
   $P :=$ cesta mezi x, y v T, P má sudou délku $\implies P + \{x, y\}$ je lichá kružnice v G. ↯ □

2.8.2 Barevnost je větší nebo rovna než klikovost

Klikovost je rovna velikosti největší kliky (úplného podgrafu) v G.

Tvrzení: Pokud $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Proof. Najde-li se v grafu úplný podgraf na k vrcholech, tak ten graf nejde obarvit méně než k barvami, takže χ je alespoň k. □

2.8.3 Barevnost je menší nebo rovna než maximální stupeň + 1

Věta: Pokud G je k-generovaný, pak $\chi(G) \leq k + 1$.

k-degenerovaný graf: $\equiv \exists \preceq$ lineární uspořádání na $V(G)$ t.ž. $\forall v \in V(G) : |\{u \prec v \mid \{u, v\} \in E(G)\}| \leq k$. Neboli: *počet všech vrcholů před v, které jsou s v spojené hranou je nejvýš k.*

Proof. Barvíme v pořadí podle uspořádání $\preceq$, z leva do prava. První obarvíme libovolně a pro každý další se podívám, kolik barev je zakázáno jeho obarvenými sousedy. Obarvení sousedé jsou ale jen nalevo, takže jich je nejvýš k. Mám k dispozici $k + 1$ barev, vždy zůstane alespoň 1 volná. □

2.8.4 Věta o 5 barvách

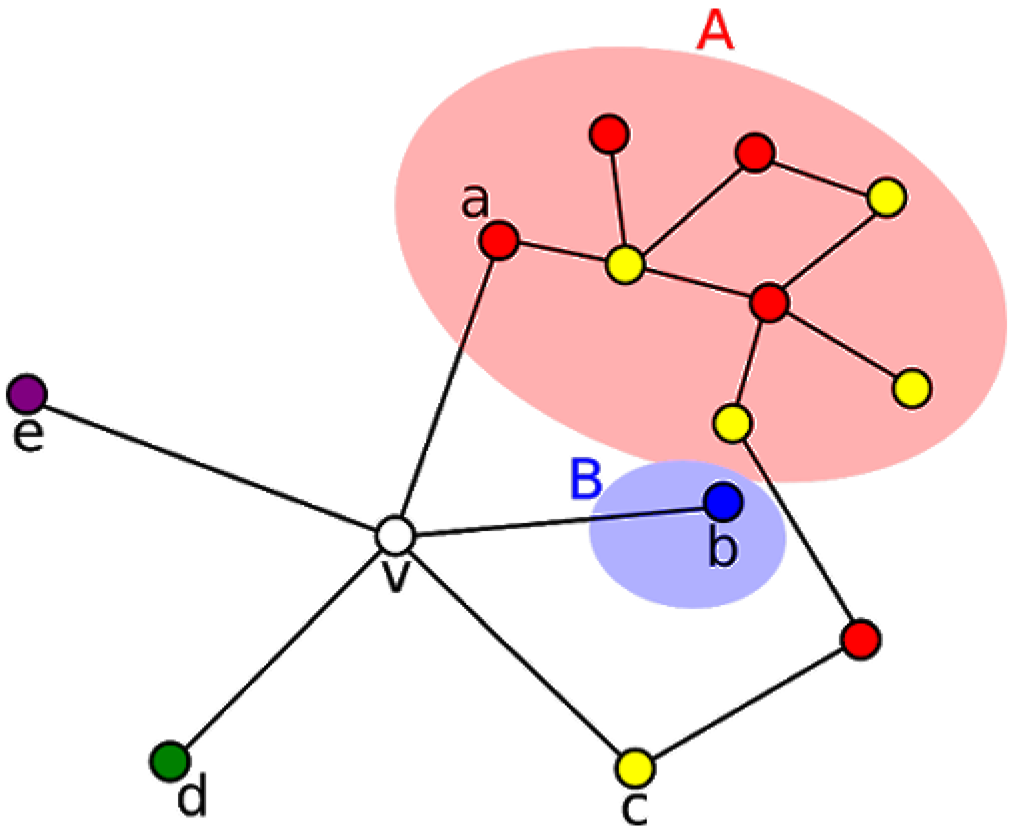
Věta: Pro graf G rovinný je $\chi(G) \leq 5$.

Proof. Kempeho řetězce - Indukcí podle $|V|$.

(i) $|V| \leq 5$ ... Triviálně.

(ii) $n - 1 \to n$: Nechť v je vrchol s min stupněm ($deg(v) \leq 5$). Vezmeme $G' := G - v \xrightarrow{IP} \exists c'$ 5-ti obarvení G'. *"Snažíme se odebrat v, obarvit indukcí zbytek a přilepit v zpátky."*

- Pokud na sousedech v je v c' maximálně 4 barvy, tak dobarvíme v.
- Pokud ne, snažíme se přebarvit něco tak, abychom si alespoň 1 barvu pro v uvolnili.
  Budujeme podgraf z a: podgraf A indukovaný vrcholy, do kterých $\exists$ cesta z a přes a-barvu a c-barvu.
  - Pokud $c \notin A$: stačí prohodit v A barvy, takže je a-barva volná pro v.
  - Pokud $c \in A$: uděláme totéž z b přes b-barvy a d-barvy, vytvoříme tím podgraf B.
    Nyní už $d \notin B$: prohození barev v B, takže se uvolní b-barva pro v.



Buď jsme prohodili barvy v A nebo jsme došli až do c a vytvořila se kružnice. Takže když jsme totéž udělali s B, tak jsme nemohli dojít až do d, protože bychom museli protnout námi vytvořenou kružnici.

□

Důkaz #2 písní: https://mj.ucw.cz/tmp/5barev

2.8.5 Věta o 4 barvách (bez důkazu)

Věta: Pro graf G rovinný je $\chi(G) \leq 4$.

2.9 Pravděpodobnost

2.9.1 Věta o úplné pravděpodobnosti

Věta: Nechť A je jev a $B_1, ..., B_k$ je rozklad Ω na jevy t.ž. $\forall i : P(B_i) \neq 0$. Potom:

$$P(A) = \sum_i P[A|B_i] \cdot P(B_i)$$

Proof.

$$P(A) = \sum_i \underbrace{P[A|B_i] \cdot P(B_i)}_{P(A \cap B_i)}$$

A to platí, protože $P(A) = + \begin{cases} P(A \cap B) = P[A|B] \cdot P(B) \\ P(A \cap \overline{B}) = P[A|B] \cdot P(\overline{B}) \end{cases}$ □

2.9.2 Bayesova věta

Věta: Nechť A je jev, kde $P(A) \neq 0$ a $B_1, ..., B_k$ je rozklad Ω na jevy t.ž. $\forall i : P(B_i) \neq 0$. Potom:

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P(B_i)}{\sum_j P[A|B_j] \cdot P(B_j)}$$

2.9.3 Věta o linearitě střední hodnoty

Věta: Nechť X, Y jsou nezávislé veličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ a $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$.

Proof. #1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X + Y] &= \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{(X + Y)(\omega)}_{X(\omega)+Y(\omega)} \cdot P(\omega) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot P(\omega) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) \cdot P(\omega)) + (Y(\omega) \cdot P(\omega)) = \\
&= \underbrace{\left(\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) \right)}_{\mathbb{E}[X]} + \underbrace{\left(\sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\omega) \right)}_{\mathbb{E}[Y]} = \\
&= \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

□

Proof. #2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\alpha X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (\alpha X)(\omega) \cdot P(\omega) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \alpha (X(\omega) \cdot P(\omega)) = \\
&= \alpha \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) \cdot P(\omega))}_{\mathbb{E}[X]} = \\
&= \alpha \mathbb{E}[X]
\end{aligned}$$

□

3 Příklady

3.1 Úvod

3.1.1 Technika důkazu indukcí a sporem

- **Důkaz sporem:** Použitím chybného předpokladu dostaneme spor - předpoklad je nepravdivý, proto platí jeho negace.
- **Důkaz indukcí** Tvrzení se rozdělí do několika podtříd, podtřídy uspořádáme do posloupnosti. Dokazujeme pro všechny objekty *první* ($n = 1$) podřídy a všechny objekty *následující* ($n + 1$) podtřídy.

3.2 Relace

3.2.1 Příklady relací

- **Prázdná:** Prázdná relace $R \subseteq \emptyset$ je podmnožin kartézského součinu prázdné množiny.
- **Univerzální:** Nechť máme relaci $R \subseteq X \times Y$, potom pro *univerzální relace* $S \subseteq X \times Y$ platí $R = S$. *Všechny prvky se propojí.*
- **Diagonální:** Relace R na X je *diagonální* $\iff \triangle R = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Pokud má v maticovém zápisu jedničky v diagonále.

3.3 Uspořádání

3.3.1 Příklady uspořádání

- **Dělitelnost** $(\mathbb{N}, \backslash)$**:** reflexivita $\frac{a}{a}$; antisymetrie $\frac{b}{a} \wedge \frac{a}{b} \implies a = b$; tranzitivita $\frac{b}{a} \wedge \frac{c}{b} \implies \frac{c}{a}$; Částečné uspořádání
- **Inkluze podmnožin** $(2^x, \subseteq)$**:** reflexivita $A \subseteq A$; antisymetrie $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$; tranzitivita $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$; Částečné uspořádání
- **Lexikografické:** Máme abecedu $(X, \preceq)$.
  Pro *lexikografické uspořádání* $(X^2, \preceq_{LEX})$ platí $(a_1, a_2) \preceq_{LEX} (b_1, b_2) \equiv a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \preceq b_2)$

3.4 Kominatorické počítání

3.4.1 Problém šatnářky: počet permutací bez pevného bodu

Znění: Do divadla přišlo n pánů s n klobouky, každý pán si odložil klobouk v šatně a po představení si jej zase vyzvedl. Šatnářka však pánům vybrala klobouky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostal svůj klobouk?
$S_n := \{\pi \mid \pi$ je permutace na $[n]\}$ ... množina všech pánů - každému pánovi je přiřazen právě 1 klobouk - bijekce
$\pi(i) = i$ ... *tzv. pevný bod* - pán dostal svůj klobouk
$Z_n := |\{\pi \in S_n \mid \forall i : \pi(i) \neq i\}|$ ... kolik $\exists$ permutací bez pevného bodu
$P_{\pi \in S_n}(\pi$ nemá pevný bod $) = \frac{Z_n}{n!}$ ... výsledná hledaná pravděpodobnost

$A := \{\pi \in S_n \mid \pi$ má pevný bod$\}$ ... $Z_n = n! - |A|$
$A_i := \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$ ... mají i jako jeden z pevných bodů
$A = \bigcup_i A_i$

$|A_i| = (n - 1)!$
$|A_i \cap A_j| = (n - 2)!$ ... pro $i \neq j$
$|$ průniku k-tice $| = (n - k)!$

Dosadíme do vzoreču pro Inkluzi a exkluzi:

$$\underbrace{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|}_{|A|} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \underbrace{\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}_{(n-k)!}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot \underbrace{\binom{n}{k} \cdot (n-k)!}_{\frac{n!\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}}}$$

$$|A| = n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - ... + \frac{n!}{k!}$$

Tím jsme však spočítali počet permutací s alespoň jedním pevným bodem, musíme tedy použít $Z_n = n! - |A|$:

$$Z_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + ... - \frac{n!}{k!}$$

$$Z_n = n! \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}_{e^{-1}}$$

Pravděpodobnost, že žádný pán nedostal svůj klobouk je $\frac{n!}{e}$.

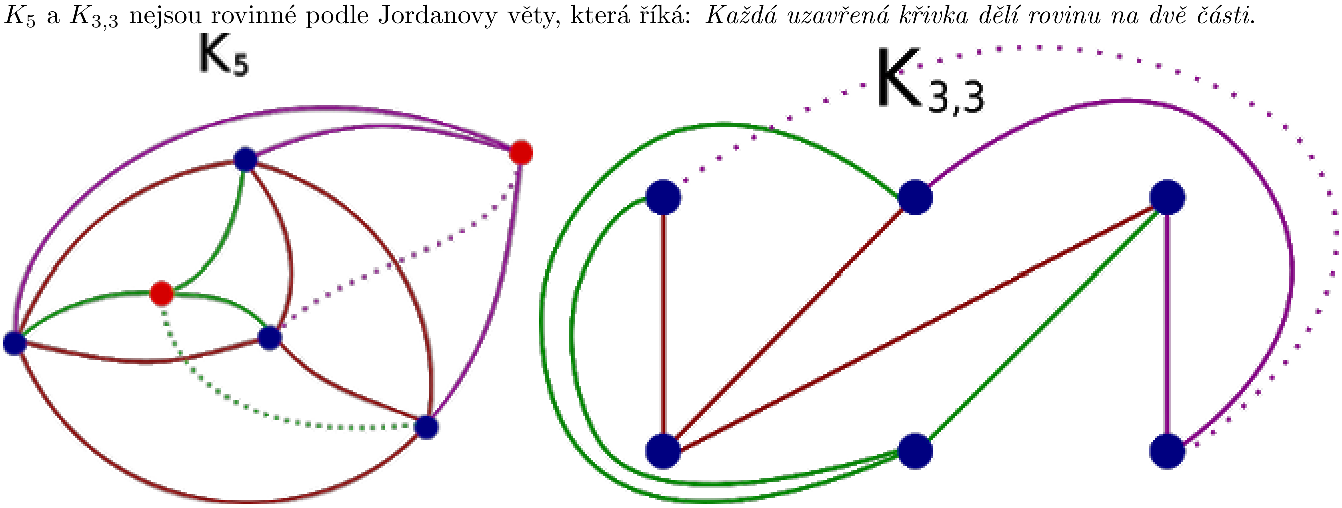
3.5 Grafy

3.6 Stromy

3.7 Rovinné kreslení grafů

3.7.1 K5 a K3,3 nejsou rovinné.

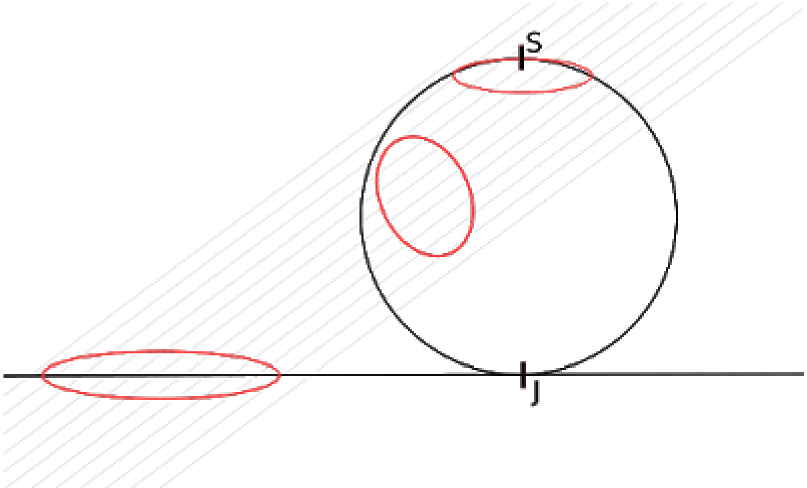
K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné podle Jordanovy věty, která říká: *Každá uzavřená křivka dělí rovinu na dvě části.*



Pokud je 5 uvnitř, nelze ji propojit s 3. Naopak, pokud je 5 venku, nelze ji propojit s 4.

3.7.2 Vnější stěnu lze zvolit.

Princip: Když mám nekreslený graf v rovině, promítnu ho stereograficky na sféru. Tím zase dostanu nakreslení na sféře a vnější stěna se promítne taky na stěnu - pozná se podle toho, že obsahuje S pól.



Při otočení: Vytvoří se rovinné zakreslení téhož grafu, stěny vypadají stejně $\implies$ mohu si zvolit, která bude vnější.

3.7.3 Klasifikace platónských těles pomocí rovinných grafů

Platónské těleso *konvexní mnohostěn, má shodné mnohoúhelníky, v každém vrcholu má stejný počet hran*
Z bodu uvnitř mnohostěnu promítáme vrcholy na sféru, máme tedy nakreslený graf na sféře. Víme ale, že graf na sféře můžeme překreslit do roviny.
Hledáme tedy rovinný graf, kde každá *stěna* má právě *k-hran* a je *d-regulární* pro nějaké d.
Nakreslíme-li do každé stěny vrchol a spojíme hranami, vznikne nový rovinný graf, který má prohozené k a d. Takže $3 \leq k, d \leq 5$.
Zároveň víme, že $k \cdot f = 2e$, protože každá stěna má k-hran $\implies f = \frac{2e}{k}$.
Zároveň víme, že $d \cdot v = 2e$, protože součet stupňů v je $2e \implies v = \frac{2e}{d}$.
Dosadíme do eulerovy formule:

$$v + f = e + 2$$
$$\frac{2e}{d} + \frac{2e}{k} = e + 2/(:2e)$$
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$$

Pravá část výsledného výrazu nám říká, že $\frac{1}{2} + \frac{1}{e} \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \implies \min(d, k) = 3$.
Vytvoříme tabulku a dopočítáme zbytek:

d	k	e	v	f
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
3	5	30	20	12
4	3	12	6	8
5	3	30	12	20

3.8 Barvení grafů

3.8.1 Převod barvení mapy na barvení grafu pomocí duality

3.8.2 Barevnost úplných grafů, cest a kružnic

- *Úplný graf*: $\chi(K_n) = n$
- *Cesta*: $\chi(P_n) = 2$
- *Kružnice*: $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{sudé} \\ 3 & \text{liché} \end{cases}$

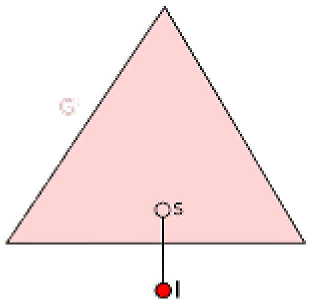
3.8.3 Princip barvení indukcí: stromy jsou 2-obarvitelné, rovinné grafy 6-obarvitelné

Tvrzení: Každý strom je 2-obarvitelný.

Proof. Indukcí podle $|V|$.

(i) $|V| = 1$ ... Triviálně.

(ii) $n - 1 \to n$: Nechť l je list a s jeho soused. Uvažme $G' := G - l \xrightarrow{IP} \exists c'$ obarvení G'.
Nyní stačí rozšířit c' na nějaké c, které listu l dává opačnou barvu, než má s. Takže: $c(l) = 3 - c'(s)$ a $c(V) = c'(V)$, pro $\forall V \neq l$.



□

3.9 Pravděpodobnost

3.9.1 Jev se také dá popsat logickou formulí.

$\{x \in X \mid \varphi(x)\}$, kde $\varphi(x)$ je *formulka*, která nám řekne, jestli je výsledek pokusu elementární jev

3.9.2 Bertrandův paradox s kartičkami

Máme 3 kartičky, s barvami stran: CC, MM, CM.
Vybereme náhodnou kartičku náhodnou stranou položíme nahoru.
Pozorovali jsme, že horní strana je červená. Jaká je prevděpodobnost, že je i spodní červená?
$\Omega = \{\underline{C}C, C\underline{C}, \underline{M}M, M\underline{M}, \underline{C}M, C\underline{M}\}$, kde _ je kartička otočená nahoru. Víme, že horní strana byla červená $\Longrightarrow$
$\Omega = \{\underline{C}C, C\underline{C}, \cancel{\underline{M}M}, \cancel{M\underline{M}}, \underline{C}M, \cancel{C\underline{M}}\}$, hledáme ale dolní stranu C, takže nám zbývá pouze:
$\Omega = \{\underline{C}C, C\underline{C}, \cancel{\underline{M}M}, \cancel{M\underline{M}}, \cancel{\underline{C}M}, \cancel{C\underline{M}}\}$, všechny jevy mají stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{3}$, takže celková $P[C] = \frac{2}{3}$.

Když řešíme přes podmíněnou pravděpodobnost: $A = C$, $B = \underline{C}$. $P[A|B] = \frac{2/6}{1/2} = \frac{2}{3}$

3.9.3 Jevy, které jsou po 2 nezávislé, ale po 3 už ne

Hod mincí: $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$, $A = \{10, 11\}$...první 1, $B = \{01, 11\}$ ...druhá 1, $C = \{00, 11\}$...sudý #1. Takže
$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$
$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

3.9.4 Součin pravděpodobnostních prostorů, projekce

Součin pravděpodobnostních prostorů $(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1)$ a $(\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2)$ je trojice $(\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1} \times 2^{\Omega_2}, P)$,
kde $\underset{A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2}{P(A)} = \sum_{(a_1, a_2) \in A} P_1(a_1) \cdot P_2(a_2)$

3.9.5 Logické formule s náhodnými veličinami dávají jevy.

n-krát hodím mincí a defijuji si náhodnou veličinu $X := \#1$. Potom mi $P[X < 3]$ dává jev.

3.9.6 Použití indikátorů k výpočtu střední hodnoty

n-krát hodím mincí a ptám se, kolik mi padlo jedniček - zajímá mě střední hodnota $\mathbb{E}[X]$ jedniček.
$X = \#1$, $X_i = \#1$ na i-té pozici, takže $X = \sum_i X_i$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = \begin{cases} 0 & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{2} \end{cases} \implies \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Sčítáme n-krát $\frac{1}{2}$, takže máme $\frac{n}{2}$.

3.9.7 Velikost řezu v grafu: střední hodnota, existuje velký řez, pravděpodobnostní algoritmus