1. ročník bc. informatika
doc. RNDr. Jiří Fiala, Ph.D.

Obsah

1 Definice

1.1 Determinanty

1.1.1 Definujte permutaci.

Permutace na množině $[n]$ je bijektivní zobrazení $p : [n] \to [n]$. $[n] = \{1, ..., n\}$*)*

1.1.2 Definujte znaménko permutace.

Znaménko permutace p je číslo $sgn(p) = (-1)^{\#\text{inverzí v } p}$.
Můžeme zapsat také: ($p \in S_n$) a skládá se z k-cyklů, potom $sgn(p) = (-1)^{n-k}$.

1.1.3 Definujte determinant.

Determinant matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je dán výrazem:

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$$

1.1.4 Definujte adjungovanou matici.

Pro matici $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je *adjungovaná matice* definována vztahem

$$adj(A)_{j,i} = (-1)^{i+j} \det(A^{i,j})$$

Dále pro regulární matici $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ platí vztah $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A)$

1.1.5 Definujte Laplaceovu matici.

Laplaceova matice grafu G na $V_G = \{v_i, ..., v_n\}$ je $L_G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, t.ž:

$$(L_G)_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i = j \\ -1 & \text{pokud } i \neq j \text{ a } (v_i, v_j) \in E_G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

1.2 Polynomy

1.2.1 Definujte polynom nad tělesem.

Polynom stupně n v proměnné x nad tělesem $\mathbb{K}$ je výraz

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

kde $a_n \neq 0$ a $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{K}$. Píšeme jako $p \in \mathbb{K}(x)$.

1.2.2 Definujte kořen polynomu a jeho násobnost.

Kořen polynomu $p \in \mathbb{K}(x)$ je $r \in \mathbb{K}$ t.ž. $p(r) = 0$.
Násobnost kořene r z $p \in \mathbb{K}(x)$ je největší $k \in \mathbb{Z}^+$, t.ž. $(x - r)^k$ dělí p.

1.2.3 Definujte algebraicky uzavřené těleso.

Těleso $\mathbb{K}$ je *algebraicky uzavřené těleso*, pokud každý polynom $p \in \mathbb{K}(x)$ stupně alespoň jedna má alespoň jeden kořen.

1.2.4 Definujte Vandermondovu matici.

Vandermondova matice $V_{n+1}(x_0, \ldots, x_n)$ je matice mající v každém řádku členy po sobě jdoucí geometrické posloupnosti. Prvek na i-tém řádku a j-tém sloupci lze vyjádřit jako x_i^j.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1.3 Vlastní čísla a vlastní vektory

1.3.1 Definujte vlastní číslo a vlastní vektor lineárního zobrazení.

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a f je lineární zobrazení $f : V \to V$, potom *vlastní číslo* zobrazení f je jakékoli $\lambda \in \mathbb{K}$, pro které existuje vektor $u \in V \setminus 0$, t.ž.: $f(u) = \lambda u$.
Nechť λ je vlastní číslo, potom jemu odpovídající *vlastní vektor* je libovolný vektor $u \in V$, t.ž.: $f(u) = \lambda u$.

1.3.2 Definujte vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Jestliže V má konečnou dimenzi n, pak f může být reprezentováno maticí $A = [f]_{XX} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ vzhledem k nějaké bázi X prostoru V. *Vlastní číslo matice* je potom $\lambda \in \mathbb{K}$ a *vlastní vektor matice* $x \in \mathbb{K}^n$, oba splňující $Ax = \lambda x$.

1.3.3 Definujte charakteristický polynom.

Charakteristický polynom matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je $p_A(t) = \det(A - tI_n)$.

1.3.4 Definujte algebraickou násobnost vlastního čísla.

Algebraická násobnost vlastního čísla λ je násobnost λ jako kořene charakteristického polynomu $p_A(\lambda)$.

1.3.5 Definujte geometrickou násobnost vlastního čísla.

Geometrická násobnost vlastního čísla λ je dimenze (pod)prostoru jeho vlastních vektorů.

1.4 Diagonalizace

1.4.1 Definujte podobné matice.

Matice $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ jsou si *podobné*, pokud existuje regulární matice R, t.ž.: $A = R^{-1}BR$.

1.4.2 Definujte diagonalizovatelnou matici.

Matice podobná diagonální matici je *diagonalizovatelná*.
(A je podobná diagonální $\iff$ prostor K^n má bázi z vlastních vektorů A).

1.4.3 Definujte Jordanův blok.

Jordanův blok je čtvercová matice ve tvaru:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

1.4.4 Definujte Jordanův normální tvar matice.

Jodrdanův normální tvar je každá čtvercová komplexní matice A podobná matici J, tedy matice ve tvaru:

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

kde každý Jordanův blok J_{λ_i} odpovídá vlastnímu číslu λ_i matice A

1.4.5 Definujte zobecněný vlastní vektor.

Zobecněný vlastní vektor matice A k vlastnímu číslu λ je lib. vektor x splňují $(A - \lambda I)^i x = 0$ pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

1.4.6 Definujte hermitovskou matici.

Matice A je *hermitovská*, pokud $A = A^H$.
($A^H \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, kde $(A^H)_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$).

1.4.7 Definujte unitární matici.

Matice A je *unitární*, pokud $A^{-1} = A^H$.

1.5 Skalární součin

1.5.1 Definujte skalární součin pro vektorové prostory nad komplexními čísly.

Skalární součin na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{C}$ je zobrazení, které přiřadí každé dvojici vektorů $u, v \in V$ skalár $\langle u \mid v \rangle \in \mathbb{C}$ tak, že jsou splněny následující axiomy:

- $\forall u \in V : \langle u \mid u \rangle \in \mathbb{R}_0^+$
- $\forall u \in V : \langle u \mid u \rangle = 0 \iff u = 0$
- $\forall u, v \in V : \langle v \mid u \rangle = \overline{\langle u \mid v \rangle}$
- $\forall u, v, w \in V : \langle u + v \mid w \rangle = \langle u \mid w \rangle + \langle v \mid w \rangle$
- $\forall u \in V, \forall a \in C : \langle au \mid v \rangle = a \langle u \mid v \rangle$

1.5.2 Definujte normu spojenou se skalárním součinem.

Nechť V je prosor se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$, pak *norma odvozená ze skalárního součinu* je zobrazení $V \to \mathbb{R}$ přiřazující vektoru u jeho normu $||u|| = \sqrt{\langle u \mid u \rangle}$.

1.5.3 Definujte kolmé vektory.

Vektory u, v z prostoru se skalárním součinem jsou *kolmé*, pokud $\langle u \mid v \rangle = 0$. Kolmé vektory značíme $u \perp v$.

1.5.4 Definujte ortonormální bázi.

Báze $Z = \{v_1, ..., v_n\}$ prostoru V se skalárním součinem je *ortonormální*, pokud $v_i \perp v_j$ pro každé $i \neq j$ a $||v_i|| = 1$ pro každý vektor $v_i \in Z$.

1.5.5 Definujte Fourierovy koeficienty.

Nechť $Z = \{v_1, ..., v_n\}$ je ortonormální báze prostoru V. Pro každé $u \in V$ platí: $u = \langle u|v_1 \rangle v_1 + ... + \langle u|v_n \rangle v_n$. Koeficienty $\langle u|v_i \rangle$ se potom nazývají *Fourierovy koeficienty.*

1.5.6 Definujte kolmou projekci.

Nechť W je prostor se skalárním součinem a V je jeho podprostor s ortonormální bází $Z = (v_1, ..., v_n)$. Potom zobrazení $p_Z : W \to V$ definované jako $p_Z(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i \rangle v_i$ je *ortogonální projekce* W na V.

1.5.7 Definujte izometrii.

Lineární zobrazení f mezi prostory V a W je *izometrie*, pokud zachovává skalární součin, neboli:

$$\langle u|w \rangle = \langle f(u)|f(w) \rangle$$

1.5.8 Definujte ortogonální doplněk.

Ortogonální doplněk podmnožiny V prostoru se skalárním součinem W je $V^\perp = \{u \in W, \forall v \in V : u \perp v\}$

1.5.9 Definujte Gramovu matici.

Nechť V je prostor se skalárním součinem a bazí $X = (v_1, \ldots, v_n)$, potom *Gramova matice* A definována vztahem $a_{i,j} = \langle v_i|v_j \rangle$ splňuje:

$$\forall u, w \in V : \langle u|w \rangle = [w]_X^H A^T [u]_X$$

1.6 Pozitivně definitní matice

1.6.1 Definujte pozitivně definitní matici.

Pokud hermitovská matice A řádu n vyhovuje $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus 0 : x^H A x > 0$, pak je matice *pozitivně definitní.*

1.6.2 Definujte Choleského rozklad.

Pro každou pozitivně definitní matici A existuje *unikátní* horní trojúhelníková matice U s kladnou diagonálou, t.ž.: $A = U^H U$. Matice U se nazývá *Choleského rozklad*.

1.7 Kvadratické a bilineární formy

1.7.1 Definujte bilineární formu.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a nechť zobrazení $f : V \times V \to \mathbb{K}$ splňuje:

- $\forall u, v \in V, \forall a \in \mathbb{K} : f(au, v) = f(u, av) = af(u, v)$
- $\forall u, v, w \in V : f(u + v, w) = f(u, w) = f(v, w)$
- $\forall u, v, w \in V : f(u, v + w) = f(u, v) = f(u, w)$

potom f je *bilineární forma* na V.

1.7.2 Definujte kvadratickou formu.

Zobrazení $g : V \to \mathbb{K}$ se nazývá kvadratická forma, pokud existuje bilineární forma f, t.ž.: $\forall u \in V : g(u) = f(u, u)$.

1.7.3 Definujte matici bilineární formy vzhledem k bázi

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ s bazí $X = (v_1, \ldots, v_n)$. *Matice bilineární formy f vzhledem k bázi X* je matice B definována vztahem $b_{i,j} = f(v_i, f_j)$.

1.7.4 Definujte analytické vyjádření formy

Analytické vyjádření bilineární formy f nad $\mathbb{K}^n$ s maticí B je homogenní polynom

$$f((x_1, \ldots, x_n)^T, (y_1, \ldots, y_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_i y_j$$

1.7.5 Definujte signaturu formy.

Nechť reálná kvadratická forma g má diagonální matici B obsahující pouze $1, -1, 0$, potom *signatura* formy g je trojice $(\#1, \# - 1, \#0)$, počítáno na diagonále matice B.

2 Věty

2.1 Determinanty

2.1.1 Uveďte a dokažte větu o linearitě determinantu.

Věta: Determinant matice je *lineárně závislý* na každém jejím řádku i sloupci. Tedy vzhledem ke sčítání řádků a násobení řádku skalárem.

Proof. Důkaz pro násobek skalárem:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t \cdot a_{i,1} & t \cdot a_{i,2} & \dots & t \cdot a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} \cdot t \right)$$

$$= t \cdot \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

□

Proof. Důkaz pro součet:
Pokud matice A, B, C splňují

$$a_{k,j} = \begin{cases} b_{i,j} + c_{i,j} & \text{pokud } k = i \\ b_{k,j} + c_{k,j} & \text{pokud } k \neq i \end{cases}$$

potom:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{k=1}^{n} a_{k,p(k)} = \sum_{p \in S_n} a_{i,p(i)} \cdot sgn(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i}^{n} a_{k,p(k)} = \\ &= \sum_{p \in S_n} (b_{i,j} + c_{i,j}) \cdot sgn(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i}^{n} a_{k,p(k)} = \\ &= \sum_{p \in S_n} b_{i,p(i)} \cdot sgn(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i}^{n} b_{k,p(k)} + \sum_{p \in S_n} c_{i,p(i)} \cdot sgn(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i}^{n} c_{k,p(k)} = \\ &= \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{k=1}^{n} b_{k,p(k)} + \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{k=1}^{n} c_{k,p(k)} = \det(B) + \det(C) \end{aligned}$$

□

2.1.2 Vyslovte a dokažte větu o determinantu součinu dvou matic.

Věta: Pro libovolné $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Proof. BÚNO A i B jsou regulární, jinak bychom dostali $0 = 0$.
Součiny s *elementárními* maticemi E zachovávají determinant $\det(EB) = \det(E) \cdot \det(B)$, protože:

- pro přičtení i-tého řádku k j-tému: $\det(E) = 1$
- pro vynásobení i-tého řádku t: $\det(E) = t$.

Rozložíme regulární A na elementární matice $A = E_1, \dots, E_k$.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1, \dots E_k B) = \det(E_1) \cdot \det(E_2, \dots, E_k B) = \\ &= \det(E_1) \cdot \dots \cdot \det(E_k) \cdot \det(B) = \det(E_1 \dots E_k) \cdot \det(B) = \\ &= \det(A) \cdot \det(B) \end{aligned}$$

□

2.1.3 Vyslovte a dokažte větu o Laplaceově rozvoji determinantu.

Věta: Nechť $A^{i,j}$ je podmatice získaná z A odstaněním i-tého řádku a j-tého sloupce, potom pro libovolné $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a jakékoli $i \in \{1, ..., n\}$ platí, že:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} \det(A^{i,j})$$

Proof. Vyjádříme i-tý řádek jako lineární kombinaci vektorů kanonické báze (transponované do řádků) a použijeme linearitu:

$$(a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n}) = a_{i,1}(e^1)^T + a_{i,2}(e^2)^T + ... + a_{i,n}(e^n)^T$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & ... & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = a_{i,1} \begin{vmatrix} ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} + a_{i,2} \begin{vmatrix} ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} + \cdots + a_{i,n} \begin{vmatrix} ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix}$$

j-tý člen:

$$\begin{vmatrix} ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ... & ... & ... \\ - & (e^j)^T & - \\ ... & ... & ... \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} - & (e^j)^T & - \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1+j+1} \begin{vmatrix} - & (e^1)^T & - \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & A^{i,j} \\ \hline \end{array} \right| =$$

$$= (-1)^{i+j} \det(A^{i,j})$$

□

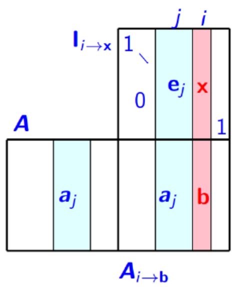
2.1.4 Uveďte a dokažte Cramerovo pravidlo (řešení systémů s determinanty).

Věta: Nechť $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je regulární matice. Pro jakékoli $b \in \mathbb{K}^n$ řešení x soustavy $Ax = B$ splňuje:

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det(A_{i \to b})$$

kde $A_{i \to b}$ získáme z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b.

Proof. Uvažme matici $I_{i \to x}$ získanou z I_n nahrazením i-tého sloupce vektorem x.
Potom $A \cdot I_{i \to x} = A_{i \to b}$, tedy: $\det(A) \cdot \det(I_{i \to x}) = \det(A_{i \to b})$, proto $x_i = \det(I_{i \to x}) = \dfrac{1}{\det(A)} \det(A_{i \to b})$.



□

2.1.5 Vyslovte a dokažte větu o adjungované matici.

Věta: Pro regulární matici $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$.

Proof.

Laplaceovým rozvojem $\det(A)$: $\begin{cases} \text{pro } i = j & (i - \text{tý řádek z } A) \cdot (i - \text{tý sloupec z adj}(A)) = \det(A) \\ \text{pro } i \neq j & (j - \text{tý řádek z } A) \cdot (i - \text{tý sloupec z adj}(A)) = \det(A') = 0 \end{cases}$, kde A' se získá z A nahrazením i-tého řádku za j-tý. Dostáváme tedy:

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n \implies A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) \right) = I_n \implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

□

2.1.6 Vyslovte a dokažte větu o počtu koster grafu.

Věta: Každý multigraf G s $|V_G| \geq 2$ splňuje $\mathcal{K}(G) = \det(L_G^{1,1})$.
Neboli: Každý graf G na alespoň dvou vrcholech má $\det(L_G^{1,1})$ koster.

Proof. BÚNO je graf G souvislý. Indukcí podle $m = |E_G|$.
Základ indukce: pro $m = 1$ má G jen dva vrcholy a $\mathcal{K}(G) = 1 = \deg(v_2) = (L_G)_{2,2} = \det(L_G^{1,1})$.
Indukční krok: Zvolme lib. $e \in E_G$, BÚNO $e = (v_1, v_2)$ a označme $A = (L_G)_{1,1}, B = (L_{G-e})_{1,1}, C = (L_{G\circ e})_{1,1}$. C je podmatice L_G odpovídající $v_3, ..., v_n$, tedy $C = A^{1,1} = B^{1,1}$. Z *IP* víme: $\mathcal{K}(G-e) = \det(B)$ a $\mathcal{K}(G\circ e) = \det(C)$. Matice A a B jsou shodné krom $b_{1,1} = a_{1,1} - 1$, protože vypuštěním e klesne stupeň v_2 o jedna. První sloupec A vyjádříme jako součet prvního sloupce B a vektoru e_1 ze standardní báze.

Linearitou $\det(A)$ podél tohoto rozkladu prvního sloupce záskáme $\det(A) = \det(B) + \det(C)$. Nyní dokončíme:

$$\mathcal{K}(G) = \mathcal{K}(G-e) + \mathcal{K}(G \circ e) = \det((L_{G-e})_{1,1}) + \det((L_{G\circ e})_{1,1}) = \det((L_G)_{1,1})$$

□

2.2 Polynomy

2.2.1 Vyslovte a dokažte malou Fermatovu větu.

Věta: Nechť $a \in \{1, ..., p-1\}$ a p je prvočíslo, potom platí: $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Proof. Pro každé a definujeme zobrazení $f_a : [p-1] \to [p-1]$ předpisem $f_a(x) = ax \mod p$.
Ukážeme, že f_a je *prosté*: Kdyby nebylo, $(\exists b, c, b \neq c) : f_a(b) = f_a(c) \implies 0 \equiv ab - ac \implies a(b-c) \equiv 0$. Ale víme, že $a \neq 0$ a $b \neq c$, takže jde o **spor**.
f_a je prosté $\implies$ je na $\implies$ je bijekcí na $[p-1]$, proto platí:

$$\prod_{x=1}^{p-1} x = \prod_{x=1}^{p-1} f_a(x) = \prod_{x=1}^{p-1} ax = a^{p-1} \prod_{x=1}^{p-1} x \implies a^{p-1} = 1$$

□

2.2.2 Vyslovte a dokažte větu o Vandermondově matici.

Věta: Vandermondova matice $V_{n+1}(x_0, \ldots, x_n)$ je regulární $\iff$ $x_0, \ldots, x_n$ jsou různá.

Proof. Odečteme první řádek z matice V_{n+1} od ostatních, vytkneme $x_i - x_0$ z i-tého řádku pro každé $i = 1, ..., n$. V prvním sloupci je n nul, takže můžeme rozvést:

$$\det V_{n+1} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2 & \ldots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2 & \ldots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & x_n^2 + x_nx_0 + x_0^2 & \ldots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nyní odzadu od každého sloupce odečteme x_0-násobek předchozího, čímž eliminujeme všechny sčítance obsahující x_0 a získáme rekurentní vztah, který lze snadno rozvést:

$$\det(V_{n+1}(x_0, ..., x_n)) = \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0)\right) \cdot \det(V_n(x_1, ..., x_n)) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$$

□

2.2.3 Uveďte a dokažte správnost Lagrangeovy interpolace.

Popis: Způsob interpolace polynomu $p \in \mathbb{K}(x)$ stupně n skrz $n+1$ bodů (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, n+1$.

Proof. *1.* Nejprve určíme $n+1$ pomocných polynomů stupně n:

$$p_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}\ldots(x - x_{n+1}))}{(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}\ldots(x_i - x_{n+1}))}$$

Můžeme si všimnout, že pro $i \neq j$ je $p_i(x_i) = 1$ a $p_i(x_j) = 0$.

2. Nyní sestavíme $p(x)$ jako lineární kombinaci $p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i p_i(x)$. Potom platí $p(x_i) = y_i p_i(x_i) = y_i$, protože ve všech ostatních sčítancích je $p_j(x_i) = 0$. □

2.3 Vlastní čísla a vlastní vektory

2.3.1 Vyslovte a dokažte větu o podprostoru vlastních vektorů.

Věta: Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu číslu tvoří podprostor.

Proof. Uvažme vlastní číslo λ lineárního zobrazení $f : V \to V$ a množinu $U = \{u \in V : f(u) = \lambda u\}$.
Pro jakékoli $u, v \in U$ a $a \in \mathbb{K}$ dostaneme:

- $f(au) = af(u) = a\lambda u = \lambda(au)$
- $f(u + v) = f(u) + f(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$.

Proto je U uzavřená na sčítání a na skalární násobky, t.j. U je podprostor V. □

2.3.2 Vyslovte a dokažte větu o lineární nezávislosti vlastních vektorů.

Věta: Nechť $f : V \to V$ je lineární zobrazení a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla f a $u_1, \ldots, u_k$ odpovídající netriviální vlastní vektory. Potom $u_1, \ldots, u_k$ jsou lineárně nezávislé.

Proof. Předpokládejme pro spor, že k je nejmenší číslo, pro které $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a $u_1, \ldots, u_k$ odporující větě, t.j. existují $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K} \setminus 0$, t.ž.: $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0$.
0 lze vyjádřit dvěma způsoby:

$$0 = \begin{cases} \lambda_k 0 = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i u_i \\ f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i u_i \end{cases}$$

Z toho dostáváme vztah: $0 = 0 - 0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i u_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i u_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) a_i u_i$
A protože $\lambda_i \neq \lambda_k$, dostaneme $(\lambda_i - \lambda_k) a_i \neq 0$. Jenže $u_1, \ldots, u_{k-1}$ jsou LZ, což je spor s minimalitou k. □

2.3.3 Vyslovte a dokažte větu o kořenech charakteristického polynomu.

Věta: Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\iff$ λ je kořenem charakteristického polynomu $p_A(t)$.

Proof.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ je vlastní číslo } A &\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : Ax = \lambda x \iff \\ &\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : 0 = Ax = \lambda x = Ax - \lambda I_n x = (A - \lambda I_n)x \iff \\ &\iff \text{matice } A - \lambda I_n \text{ je singulární} \iff \\ &\iff 0 = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

□

2.3.4 Uveďte a dokažte Cayley-Hamiltonovu větu.

Věta: Pro matici $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a její charakteristický polynom $p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ platí, že: $p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = 0_n$, kde 0_n značí nulovou čtvercovou matici řádu n.

Proof. Použijeme větu, že $M \cdot \mathrm{adj} M = (\det M) \cdot I_n$ pro $M = A - tI_n$. Složky $\mathrm{adj}(A - tI_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v t stupně nejvýše $n - 1$. Můžeme je rozepsat:

$$\mathrm{adj}(A - tI_n) = t^{n-1} B_{n-1} + \cdots + tB_1 + B_0 \text{ pro } B_{n-1}, \ldots, B_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Nyní máme:

$$(A - tI_n)(t^{n-1} B_{n-1} + \cdots + tB_1 + B_0) = p_A(t) I_n = (-1)^n t^n I_n + a_{n-1} t^{n-1} I_n + \cdots + a_2 t^2 I_n + a_1 t I_n + a_0 I_n$$

- koeficient u t^n : $-B_{n-1} = (-1)^n I_n \cdot A^n$ zleva

- koeficienty u t^i : $AB_i - B_{i-1} = a_i I_n \cdot A^i$ zleva
- koeficient u t^0 : $AB_0 = a_0 I_n$ ponecháme a vše sečteme

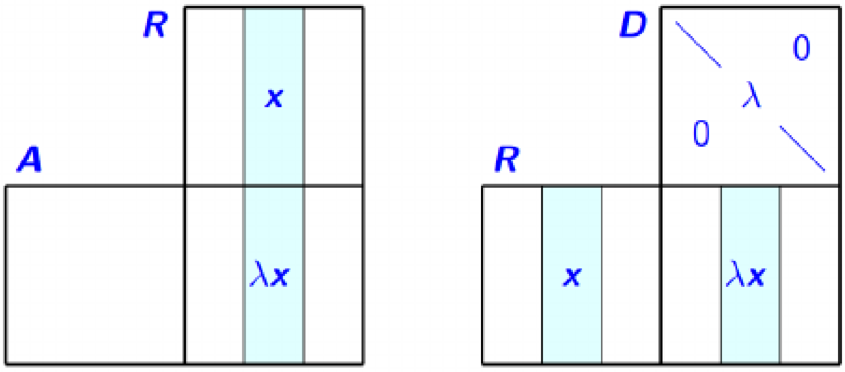
Levá strana: $-A^n B_{n-1} + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \cdots + A(AB_1 - B_0) + AB_0 = 0_n$.
Pravá strana: $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = p_A(A)$. $\square$

2.4 Diagonalizace

2.4.1 Uveďte a dokažte nezbytnou a postačující podmínku, kdy je matice diagonalizovatelná.

Věta: Matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je podobná diagonální matici $\iff$ prostor $\mathbb{K}^n$ má bázi z vlastních vektorů A.

Proof. $AR = RD$ s diagonální maticí D, pokud pro každé i platí, že existuje vektor x (i-tý sloupec R), t.ž.: $Ax = \lambda x = d_{i,i}x$.



$$A = RDR^{-1} \iff AR = RD \iff R^{-1}AR = D$$

$\square$

2.4.2 Vyslovte a dokažte větu o diagonalizaci speciálních komplexních matic.

Věta: Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná. Navíc existuje unitární matice R, t.ž.: $R^{-1}AR$ je diagonální.

Proof. Indukcí podle n. Věta platí pro $n = 1$. Označme $A_n = A$.
V tělese $\mathbb{C}$ má matice A_n vlastní číslo λ s vlastním vektorem x. Zvýšíme x faktorem $\frac{1}{\sqrt{x^H x}}$, abychom dostali x splňující $x^H x = 1$.
Doplníme x na unitární matici P_n.
$P_n^H A_n P_n$ je hermitovská $(P_n^H A_n P_n)^H = P_n^H A_n^H (P_n^H)^H = P_n^H A_n P_n$.
Protože $A_n x = \lambda x$, matice $A_n P_n$ má λx jako první sloupec. Protože P_n je unitární, první sloupec $P_n^H A_n P_n$ je:

$$P_n^H A_n x = P_n^H (A_n x) = P_n^H (\lambda x) = \lambda P_n^H x = \lambda(1, 0, \ldots, 0)^T = (\lambda, 0, \ldots, 0)^T$$

$P_n^H A_n P_n$ je hermitovská $\implies$ $\lambda \in \mathbb{R}$ a zbytek prvního řádku je 0^T. Proto $P_n^H A_n P_n = \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \\ \hline\end{array}$, kde A_{n-1} je hermitovská. Podle indukčního předpokladu $R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$ pro nějakou unitární matici R_{n-1} a diagonální matici D_{n-1}.
Položíme $R_n = P_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array}$, součiny unitárních matic jsou unitární. Nyní:

$$\begin{aligned} R_n^{-1} A_n R_n = R_n^H A_n R_n &= \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^H \\ \hline\end{array} \cdot P_n^H A_n P_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array} = \\ &= \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^H \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda & 0^T \\ \hline 0 & D_{n-1} \\ \hline\end{array} = \\ &= D_n \end{aligned}$$

$\square$

2.5 Skalární součin

2.5.1 Uveďte a dokažte Cauchy-Schwarzovu nerovnost.

Věta: Pro skalární součin libovolných dvou vektorů u a v ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$ platí:

$$|\langle u \mid v\rangle| \leq \sqrt{\langle u \mid u\rangle \cdot \langle v \mid v\rangle} = ||u|| \cdot ||v||$$

Proof. Pro $u = 0$ nebo $v = 0$ dostaneme $0 \leq 0$. *Platí.*
Pro jakékoli $a \in \mathbb{C}$ platí, že $||u + av||^2 \geq 0$, ale také:

$$||u + av||^2 = \langle u + av \mid u + av\rangle = \langle u \mid u\rangle + a\langle v \mid u\rangle + \overline{a}\langle u \mid v\rangle + a\overline{a}\langle v \mid v\rangle$$

Pro vzájemné odečtení posledních dvou členů zvolíme $a = -\frac{\langle u|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle u \mid u\rangle - \frac{\langle u \mid v\rangle}{\langle v \mid v\rangle} \cdot \langle v \mid u\rangle \\
\langle u \mid v\rangle \cdot \langle v \mid u\rangle &\leq \langle u \mid u\rangle \cdot \langle v \mid v\rangle \\
|\langle u \mid v\rangle|^2 &\leq ||u||^2 \cdot ||v||^2 \\
|\langle u \mid v\rangle| &\leq ||u|| \cdot ||v||
\end{aligned}$$

□

2.5.2 Uveďte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost.

Věta: Každá norma odvozená ze skalárního součinu splňuje *trojúhelníkovou nerovnost*: $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Proof.

$$\begin{aligned}
&||u + v|| = \sqrt{\langle u + v \mid u + v\rangle} = \sqrt{\langle u \mid u\rangle + \langle v \mid u\rangle + \langle u \mid v\rangle + \langle v \mid v\rangle} \leq \sqrt{||u||^2 + 2|\langle u \mid v\rangle| + ||v||^2} \\
&||u + v|| \leq \sqrt{||u||^2 + 2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2} = ||u|| + ||v|| \\
&||u + v|| \leq ||u|| + ||v||
\end{aligned}$$

□

2.5.3 Vyslovte a dokažte větu o Fourierových koeficientech.

Věta: Nechť $Z = \{v_1, ..., v_n\}$ je ortonormální báze prostoru V. Pro každé $u \in V$ platí: $u = \langle u|v_1\rangle v_1 + ... + \langle u|v_n\rangle v_n$. Potom $\langle u|v_n\rangle$ jsou Fourierovy koeficienty.

Proof.

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \implies \langle u|v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mid v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i|v_j\rangle = a_j$$

□

2.5.4 Uveďte a dokažte správnost Gram-Schmidtovy ortonormalizace (včetně lemmatu, pokud jej potřebujete).

Algoritmus: převede lib. bázi $(u_1, \ldots, u_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(v_1, \ldots, v_n)$:

`for` $i = 1, \ldots, n$ `do:`

1. $w_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_i|v_j\rangle v_j$
2. $v_i = \frac{1}{||w_i||} w_i$

`end`

Správnost:

- Díky 1. a předchozímu lemmatu: $\forall i, j; j < i : w_i \perp v_j$, odtud $v_i \perp v_j$ pro $j \neq i$.
- Díky 2.: $||v_i|| = \left|\left|\frac{1}{||w_i||} w_i\right|\right| = \frac{||w_i||}{||w_i||} = 1$.
- Díky lemmatu o výměně: $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_{i-1}, u_i) = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i) = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_i)$.

Lemma: Nechť p_Z je ortogonální projekce W na V, potom $\forall v_i \in Z : u - p_Z(u) \perp v_i$.

Proof. #1

$$\langle u - p_Z(u) \mid v_i \rangle = \left\langle u - \sum_{j=1}^{n} \langle u \mid v_j \rangle v_j \mid v_i \right\rangle = \langle u|v_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle u|v_j\rangle\langle v_j|v_i\rangle = \langle u|v_i\rangle - \langle u|v_i\rangle = 0$$

□

Lemma: Nechť Y generuje vektorový prostor V nad $\mathbb{K}$. Jestliže pro vektor $u \in V$ exisutjí $v_1, \ldots, v_n \in Y$ a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, t.ž.: $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, kde $a_i \neq 0$ pro nějaké i, potom $\mathcal{L}((Y \setminus v_i) \cup u) = V$.

Proof. #2

$u = a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i + \ldots a_n v_n \implies v_i = \frac{1}{a_i} \left(u - \sum_{j \neq i} a_j v_j \right)$. Jakékoli $w \in V$ můžeme zapsat jako lineární kombinaci prvků z Y. Vyskytuje-li se v_i v této kombinaci, dosadíme za v_i výraz výše. Tím získáme w jako lineární kombinaci prvků z $(Y \setminus v_i) \cup u$.

V konečném případě, je-li $Y = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $w = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$, dostaneme jmenovitě $w = \frac{b_i}{a_i} u + \sum_{j \neq i} \left(b_j - \frac{a_j b_i}{a_i} \right) v_j$. □

2.5.5 Vyslovte a dokažte větu o izometrii a normě.

Věta: Lineární zobrazení mezi prostory V a W je izometrie, právě když zachovává související normu, tj.:

$$||u|| = ||f(u)||$$

Proof. Protože norma závisí na skalárním součinu, máme $\implies$.
Pro $\impliedby$ porovnejme:

$$||u + aw||^2 = ||u||^2 + a\langle w|u\rangle + \overline{a}\langle u|w\rangle + a\overline{a}||w||^2$$
$$||f(u + aw)||^2 = ||f(u)||^2 + a\langle f(w)|f(u)\rangle + \overline{a}\langle f(u)|f(w)\rangle + a\overline{a}||f(w)||^2$$

- pro $a = 1$ máme: $\langle w|u\rangle + \langle u|w\rangle = \langle f(w)|f(u)\rangle + \langle f(u)|f(w)\rangle$
- pro $a = i$ mámě: $\langle w|u\rangle - \langle u|w\rangle = \langle f(w)|f(u)\rangle - \langle f(u)|f(w)\rangle$

$\implies \langle u|w\rangle = \langle f(u)|f(w)\rangle$ □

2.5.6 Vyslovte a dokažte větu o izometrii a vlastnostech její matice.

Věta: Nechť V a W jsou prostory se skalárním součinem konečné dimenze a X, Y jsou jejich ortonormální báze. Lineární zobrazení $f : V \to W$ je bijektivní izometrie $\iff$ $[f]_{XY}$ je unitární.

Proof. Lineární bijekce implikuje stejné dimenze a naopak.
Protože X je ortonormální: $\langle u|w\rangle = [w]_X^H [u]_X$
Protože Y je ortonormální: $\langle f(u)|f(w)\rangle = [f(w)]_Y^H [f(u)]_Y = [w]_X^H [f]_{XY}^H [f]_{XY} [u]_X$
Maticová rovnost $x^T y = x^T A y$ platí pro všechny vhodné vektory x a y pouze v případě, je-li A jednotková matice. V našem případě je f izometrie, pokud $\forall u, w : [w]_X^H [u]_X = [w]_X^H [f]_{XY}^H [f]_{XY} [u]_X$, což platí právě když $[f]_{XY}^H [f]_{XY} = I$, neboli je-li $[f]_{XY}$ unitární. □

2.5.7 Vyslovte a dokažte větu o ortogonálním doplňku.

Věta: Pro konečně generovaný prostor W se skalárním součinem a podprostor V platí:

$$(V^{\perp})^{\perp} = V \text{ a } \dim V + \dim V^{\perp} = \dim W$$

Proof. Zvolíme nějakou ortonormální bázi X prostoru V a doplníme ji na ortonormální bázi Z prostoru W.
Označme $Y = Z \setminus X$, $X = (x_1, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, \dots, y_l)$.
Každé $u \in \mathcal{L}(X) = V$ je kolmé ke každému $v \in \mathcal{L}(Y)$:

$$\langle u|v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \middle| \sum_{j=1}^{l} b_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_i \overline{b_j} \langle x_i|y_j\rangle = 0$$

protože Z je ortonormální báze. Proto $\mathcal{L}(Y) \subseteq V^{\perp}$.
Nyní vezměme $w \in V^{\perp}$ a uvažme $[w]_Z$. Protože Z je ortonormální, koeficienty w vzhledem k Z jsou Fourierovy koeficienty dané skalárním součinem w s prvky báze Z.
Protože $w \in V^{\perp}$, máme $\forall x_i \in X : \langle w|x_i\rangle = 0$, tedy: $w \in \mathcal{L}(Y)$, t.j. $V^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(Y)$ a tedy $V^{\perp} = \mathcal{L}(Y)$.
Nyní: $\dim V + \dim V^{\perp} = |X| + |Y| = |Z| = \dim W$ a také $(V^{\perp})^{\perp} = \mathcal{L}(Z \setminus Y) = \mathcal{L}(X) = V$. □

2.5.8 Vyslovte a dokažte větu o skalárním součinu dvou vektorů a Gramově matici.

Věta: Nechť V je prostor se skalárním součinem a bazí $X = (v_1, \dots, v_n)$. Potom *Gramova matice* A definována $a_{i,j} = \langle v_i|v_j\rangle$ splňuje $\forall u, w \in V : \langle u|w\rangle = [w]_X^H A^T [u]_X$.
(Pokud X je ortonormální báze, pak $A = I_n$).

Proof. Označme $[u]_X = (b_1, \dots, b_n)^T$, $[w]_X = (c_1, \dots, c_n)^T$, t.j. $u = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ a $w = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$. Dostáváme:

$$\langle u|w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \middle| \sum_{j=1}^{n} c_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i \overline{c_j} \langle v_i|v_j\rangle = [w]_X^H A^T [u]_X$$

□

2.6 Pozitivně definitní matice

2.6.1 Vyslovte a dokažte větu o třech ekvivalentních podmínkách pro pozitivně definitní matice.

Věta: Pro hermitovskou matici A jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. A je pozitivně definitivní
2. A má všechna vlastní čásla kladná
3. Existuje regulární matice U, t.ž.: $A = U^H U$.

Proof.
$1 \implies 2$: Protože A je hermitovská, má vlastní čísla reálná. Nechť x je netriviální vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ, potom $0 < x^H A x = \lambda x^H x = \lambda \langle x|x\rangle$. Z $\langle x|x\rangle > 0$ máme $\lambda > 0$.
$2 \implies 3$: Protože A je hermitovská, existují unitární R a diagonální D, t.ž.: $A = R^H D R$. Vezměme diagonální $\tilde{D} : \tilde{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ a $U = \tilde{D} R$. Nyní $U^H U = (\tilde{D} R)^H \tilde{D} R = R^H \tilde{D}^H \tilde{D} R = R^H D R = A$. U je regulární, protože unitární i diagonální matice jsou regulární.
$3 \implies 1$: Pokud $x \in \mathbb{C}^n \setminus 0$, pak $Ux \neq 0$, protože U je regulární. Nyní: $x^H A x = x^H U^H U x = (Ux)^H U x = \langle Ux|Ux\rangle > 0$. □

2.6.2 Vyslovte a dokažte větu o rekurentní podmínce pro pozitivně definitní matice.

Věta: Bloková matice $A = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array}$ je pozitivně definitní $\iff$ $\alpha > 0$ a matice $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H$ je pozitivně definitní.

Proof.
Gaussova eliminace prvního sloupce A odpovídá součinu

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^H \\ \hline -\frac{1}{\alpha} a & I \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \\ \hline \end{array}$$

Následně dostáváme:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^H \\ \hline -\frac{1}{\alpha} a & I \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -\frac{1}{\alpha} a^H \\ \hline 0 & I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & 0^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \\ \hline \end{array}$$

Matice elementárních úprav je regulární, a tak A je pozitivně definitní $\iff$ výsledná bloková matice je pozitivně definitní, což nastává $\iff$ má oba nenulové bloky pozitivně definitní. □

2.6.3 Vyslovte a dokažte větu o pozitivně definitních maticích a determinantech.

Věta: Hermitovská matice A řádu n je pozitivně definitní $\iff$ matice $A_1, \ldots, A_n$ mají kladné determinanty, kde A_i se sestává z prvních i řádků a sloupců A

Proof. Použijeme Gaussovu eliminace $A \sim\sim A'$ pro test, zda je A pozitivně definitní. Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou prvky na diagonále výsledné trojúhelníkové matice A'. Protože jsme eliminovali řádky shora dolů, máme $\det A = \det A' = \prod_{j \le i} \alpha_j = \det A_{i-1} \alpha_i$. A je pozitivně definitní $\iff$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ $\iff$ $\det A_1, \ldots, \det A_n > 0$ □

2.6.4 Uveďte a dokažte správnost algoritmu pro výpočet Choleského rozkladu.

Algoritmus: Pro každou pozitivně definitní matici A existuje unikátní trojúhelníková matice U s kladnou diagonálou, t.ž.: $A = U^H U$. Matice U se nazývá Choleského rozklad.

`Input:` Hermitovská matice A

`Output:` Choleského rozklad U, pokud je A pozitivně definitní

`for` $i = 1, \ldots, n$ `do:`

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}} u_{ki}}$$

`if` $u_{ii} \notin \mathbb{R}^+$ `then STOP` (A není pozitivně definitní)

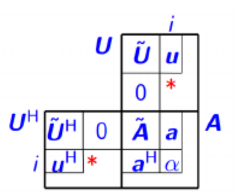
`for` $j = i+1, \ldots, n$ `do:`

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}} u_{kj} \right)$$

`end`

`end`

Správnost: Předpokládejme, že algoritmus selže $*$ během i-té iterace, tj. $\alpha \le u^H u$.
Máme $\tilde{A} = \tilde{U}^H \tilde{U}$ a $a = \tilde{U}^H u$.



Nechť $x^T = \boxed{\tilde{x}^T \mid 1 \mid 0\ldots0}$, kde $\tilde{x} = -\tilde{U}^{-1}u$.

$$\begin{aligned}
\text{Nyní } x^H Ax &= \\
&= \tilde{x}^H \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{x}^H a + a^H \tilde{x} + \alpha = \\
&= (-\tilde{U}^{-1}u)^H(\tilde{U}^H\tilde{U})(-\tilde{U}^{-1}u) + (-\tilde{U}^{-1}u)^H(\tilde{U}^H u) + (\tilde{U}^H u)^H(-\tilde{U}^{-1}u) + \alpha = \\
&= u^H u - u^H u - u^H u + \alpha = \alpha - u^H u \le 0
\end{aligned}$$

Proto A není pozitivně definitní

2.7 Kvadratické a bilineární formy

2.7.1 Vyslovte a dokažte větu o diagonalizovatelnosti matic forem.

Věta: Pokud je g kvadratická forma vektorového prostoru V konečné dimenze n nad tělesem $\mathbb{K}$ jiné Charakteristiky než 2, pak má forma g diagonální matici B vzhledem k vhodné bázi X.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ existuje regulární matice R, t.ž.: $R^T AR$ je diagonální.

Proof. Indukcí podle n.
Označme $A = A_n = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline\end{array}$.

(*a*) Když $\alpha \neq 0$, volíme $P_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -\frac{1}{\alpha}a^T \\ \hline 0 & I_{n-1} \\ \hline\end{array}$, pak:

$$P_n^T A_n P_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}a & I_{n-1} \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -\frac{1}{\alpha}a^T \\ \hline 0 & I_{n-1} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^T \\ \hline 0 & -\frac{1}{\alpha}aa^T + \tilde{A} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \\ \hline\end{array}$$

kde $A_{n-1} = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je symetrická.

Dle indukčního předpokladu existuje R_{n-1} pro A_{n-1}. Zvolíme $R_n = P_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array}$, pak:

$$R_n^T A_n R_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^T \\ \hline\end{array} \cdot P_n^T A_n P_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^T A_{n-1} R_{n-1} \\ \hline\end{array}$$

$R_n^T A_n R_n$ je tedy diagonální.

(*b*) Pokud $\alpha = 0$, ale $a \neq 0$, pak $a_{i,1} \neq 0$ pro nějaké i. Použijeme elementární matici E pro přičtení i-tého sloupce k prvnímu. Vezmeme $\tilde{A} = E^T AE$ namísto A. Protože $\alpha' = 2a_{i,1} \neq 0$, můžeme postupovat jako (a).

(*c*) Když $\alpha = 0$ a $a = 0$, pak vezmeme $A_{n-1} = \tilde{A}$ a $R_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array}$.

□

2.7.2 Uveďte a dokažte Sylvesterův zákon setrvačnosti — o diagonalizaci kvadratických forem.

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném reálném vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s $1, -1, 0$. Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1.

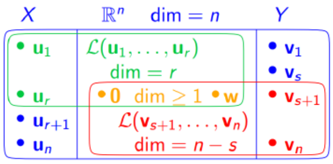
Proof.

1. **Existence:** Nechť B je maticí formy vzhledem k nějaké bázi Y. Reálné symetrické matice lze diagonalizovat, neboli $B = R^T DR$ pro regulární R. Rozložíme $D = S^T D'S$, kde $d_{i,i} \begin{cases} = 0 & d'_{ii} = 0. s_{ii} = 1 \\ > 0 & d'_{ii} = 1. s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} \\ < 0 & d'_{ii} = -1. s_{ii} = \sqrt{-d_{ii}} \end{cases}$
Nyní je SR regulární a $B = (SR)^T D'SR$. Zvolíme bázi X tak, že souřadnice vektorů X vzheldem k Y jsou sloupce SR, tzn. $[id]_{XY} = SR$ a také $[id]_{YX} = (SR)^{-1}$.
Nyní $[id]_{YX}^T B[id]_{YX} = ((SR)^{-1})^T (SR)^T D'SR(SR)^{-1} = D'$ je hledaná diagonální matice formy.

2. **Jednoznačnost počtu $1, -1, 0$:** Nechť $X = (u_1, \dots, u_n)$, $Y = (v_1, \dots, v_n)$ jsou dvě báze, t.ž.: odporující matice B a B' formy g jsou diagonální s $1, -1, 0$ uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a 0 jsou poslední. Protože součiny s regulárními maticemi $[id]_{XY}$ nemění hodnost:

$$\#0 \text{ v } B = n - \operatorname{rank} B = n - \operatorname{rank} B' = \#0 \text{ v } B'$$

Nechť $r = \#1$ v B, $s = \#1$ v B'. Pokud $r > s$, pak uvažme podprostory $\mathcal{L}(u_1, \dots, u_r)$ a $\mathcal{L}(v_{s+1}, \dots, v_n)$. Součet jejich dimenzí $r + n - s$ přesahuje n, mají tedy netriviální průnik.
(Používáme pozorování $\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(\mathcal{L}(U \cup V))$ *)*
— Levá strana je ostře větší než n, $\dim(\mathcal{L}(U \cup V)) \leq \dim \mathbb{R}^n = n \implies \dim(U \cap V) \geq 1$.



Zvolme $w \in (\mathcal{L}(u_1, \dots, u_r) \cap \mathcal{L}(v_{s+1}, \dots, v_n)) \setminus 0$, tedy $[w]_X = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)^T$, $[w]_Y = (0, \dots, 0, y_{s+1}, \dots, y_n)^T$. Nyní $g(w) = [w]_X^T B [w]_X = x_1^2 + \dots + x_r^2 > 0$,
ale $g(w) = [w]_Y^T B' [w]_Y = -y_{s+1}^2 - \dots - y_{\text{rank } B'}^2 \leq 0$, což je spor.
Dostáváme $r \not> s$, symetricky též $s \not> r$ a proto $r = s$.

□

2.8 Aplikace

2.8.1 Vyslovte a dokažte větu o počtu přímek svírajících stejný úhel.

Věta: V $\mathbb{R}^d$ může být nejvýše $\binom{d+1}{2}$ přímek svírat stejný úhel.

Proof. Předpokládejme, že existuje n takových přímek. Zvolíme vektory jednotkové délky $v_1, \dots, v_n$ z každé přímky po jednom.

Dostaneme $\langle v_i \mid v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ \cos\varphi & \text{jinak} \end{cases}$

Ukážeme, že matice $v_1 v_1^T, v_2 v_2^T, \dots, v_n v_n^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ jsou lineárně nezávislé. Pak $n \leq \binom{d+1}{2}$, protože dimenze prostoru symetrických matic z $\mathbb{R}^{d \times d}$ je $\binom{d+1}{2}$.

Předpokládejme, že $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i v_i^T = 0$ *(matice $d \times d$ plná nul)*. Pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$0 = v_j^T 0 v_j = v_j^T \left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i v_i^T \right) v_j = \sum_{i=1}^{n} a_i v_j^T v_i v_i^T v_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i \mid v_j \rangle^2 = a_j + \cos^2\varphi \sum_{i \neq j} a_i$$

Tyto podmínky na $a_1, \dots, a_n$ zapsané jako soustava rovnic:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos^2\varphi & \dots & \cos^2\varphi \\ \cos^2\varphi & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cos^2\varphi \\ \cos^2\varphi & \dots & \cos^2\varphi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matice této soustavy je regulární, proto $a_1 = \dots = a_n = 0$. Tudíž $v_1 v_1^T, v_2 v_2^T, \dots, v_n v_n^T$ jsou lineárně nezávislé. □

3 Přehled

(U přehledových otázek Uveďte definice, tvrzení, věty, příklady a souvislosti. Důkazy u přehledových otázek nejsou vyžadovány.)

3.1 Skalární součin

3.1.1 Přehledově sepište, co víte o skalárním součinu a související normě.

- **Definice:** *Standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$: $\langle u \mid v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = v^T u$.
- **Definice:** *Standardní skalární součin* na $\mathbb{C}^n$: $\langle u \mid v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} = v^H u$. Kde index H je *Herminovská transpozice* daná vztahem $A^H_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$.
- **Definice:** *Skalární součin (1.5.1)*
- **Definice:** *Norma (1.5.2)*
- **Věta:** *Cauchy-Schwarzovu nerovnost (2.5.1)*
- **Věta:** *Trojúhelníková nerovnost (2.5.2)*
- **Věta:** *Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem:* Pro libovolný vektor $u \in \mathbb{R}^n$ platí:

  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

  Proof. Zvolíme $v = (1, 1, ..., 1)^T$ a použijeme *Cauchy-Schwarzovu nerovnost* pro standardní skalární součin:

  $$\sum_{i=1}^{n} u_i = \langle u \mid v \rangle \leq |\langle u \mid v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \cdot \sqrt{n}$$

  □

- Vlastnosti:
  - *Úhel φ mezi vektory u a v* je dán výrazem $\cos\varphi = \frac{\langle u|v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$,