Lineární programování a kombinatorická optimalizace - příprava na zkoušku

Karel Velička

10. září 2024

Vyučující: *prof. RNDr. Martin Loebl, CSc.*

Obsah

1 Standardní tvar LP, vrchol, stěny, bázická řešení

Definice 1.1. ***(Úloha LP v kanonickém tvaru)*** je následující optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{pro} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{za podmínek} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Definice 1.2. ***(Úloha LP v rovnicovém/ standardním tvaru)*** je následující optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{pro} \quad & \boldsymbol{x} \in [0, \infty)^n \\ \text{za podmínek} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Definice 1.3. ***(Úloha celočíselného lineárního programování)*** je následující optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{pro} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \\ \text{za podmínek} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Definice 1.4. ***(Báze matice)*** $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je báze matice A, jestliže $A_B \neq 0$

Definice 1.5. ***(Množina přípustných řešení)*** je množina $P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$.

Definice 1.6. ***(Bázické řešení)*** *je* $\boldsymbol{x} \in P$*, pokud existuje báze* B *matice* A *taková, že* $\boldsymbol{x}_i = 0$ *pro každé* $i \notin B$.

Definice 1.7. ***(Konvexní mnohostěn)*** je průnikem konečně mnoha poloprostorů:

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}.$$

Definice 1.8. ***(Dimenze konvexního mnohostěnu)****:* $\dim P = \max d$, t.ž. $\exists \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d \subseteq P$ takové, že $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0, \ldots, \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}_0$ jsou afinně (tedy i lineárně) nezávislé.
(platí $\dim\{\boldsymbol{x}_0\} = 0, \dim \emptyset = -1$.*)*

Definice 1.9. ***(Vrchol)****:* značíme $\boldsymbol{v} \in P \subseteq \mathbb{R}^n$, pokud existuje $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, že $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{v} > \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}$, pro každé $\boldsymbol{y} \in P \setminus \{\boldsymbol{v}\}$.

Definice 1.10. ***(k-dimenzionální stěna)****:* je $F \subseteq P$, pokud F je k-dimenzionální konvexní mnohostěn a pokud $(\exists \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}) : (\forall \boldsymbol{y} \in F)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z})$ a zároveň $(\forall \boldsymbol{y} \in P \setminus F)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} < \boldsymbol{z})$.

Věta 1.1. *Každou úlohu LP lze převést na standardní tvar.*

Důkaz.

(i) Rovnice na nerovnice: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \rightsquigarrow \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \ \wedge \ A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$

(ii) Nerovnice na rovnice: $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \quad \rightsquigarrow \quad A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{z} \geq 0$

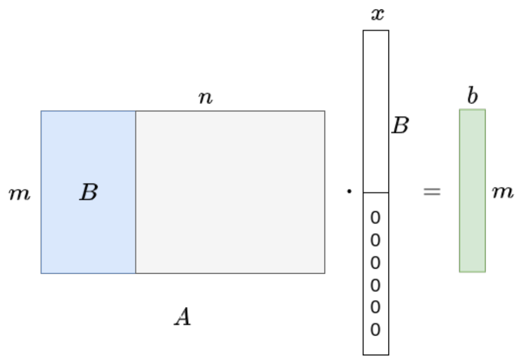
(iii) Nezáporné na neomezené proměnné: $\boldsymbol{x} \geq 0 \rightsquigarrow$ přidáme podmínky na nezápornost jako nerovnice

(iv) Neomezené na nezáporné proměnné: $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{x}_i^+ - \boldsymbol{x}_i^-; \quad \boldsymbol{x}_i^+ \geq 0, \boldsymbol{x}_i^- \geq 0$

$\blacksquare$

Pozorování 1.1. *Každé bázi přísluší nejvýše jedno bázické řešení.*

Důkaz.



$$A_B \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b} = \begin{cases} \boldsymbol{x}_B \geq 0 & \boldsymbol{x} \textit{ je bázické řešení,} \\ \boldsymbol{x}_B < 0 & \boldsymbol{x} \textit{ není bázické řešení.} \end{cases}$$

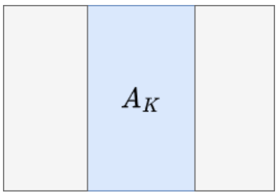
$\blacksquare$

Pozorování 1.2. *Řešení $\boldsymbol{x} \in P$ je bázické $\iff$ sloupce matice A_K, kde $K = \{i \mid \boldsymbol{x}_i > 0\}$, jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz.

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}$ odpovídá bázi B; $K \subset B$ $\rightsquigarrow$ z definice

$\Leftarrow$



$|K| = m \implies K$ je báze
$|K| < m \implies$ rozšíříme K na bázi K'.
$\boldsymbol{x}$ je pak jediným řešením soustavy $A_{K'}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

$\blacksquare$

Věta 1.2. *Je-li účelová funkce $(\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0)$ s alespoň jedním přípustným řešením shora omezená na množině P přípustných řešení, potom pro každé $\boldsymbol{x}_0 \in P$ existuje bázické řešení $\bar{\boldsymbol{x}}$ splňující $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0 \leq \boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}}$.*

Důkaz.
Nechť $\bar{\boldsymbol{x}} \in P$ splňuje $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0 \leq \boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}}$ a zároveň má $\bar{\boldsymbol{x}}$ minimální počet nenulových komponent. Ukážeme, že je $\bar{\boldsymbol{x}}$ bázické.
Nechť $K = \{\bar{\boldsymbol{x}}_j > 0 \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$.

(a) Sloupce matice A_K jsou lineárně nezávislé $\implies$ $\bar{\boldsymbol{x}}$ je bázické řešení *(viz. Pozorování 1.2)* .

(b) Sloupce A_K jsou lineárně závislé. To povedeme ke sporu.

Jelikož jsou závislé, tak $\exists \tilde{\boldsymbol{w}} \neq 0$ takové, že $A_K\tilde{\boldsymbol{w}} = 0$. To doplníme nulami na $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, kde $\boldsymbol{w} \neq 0$ a $A\boldsymbol{w} = 0$.

(i) Nechť platí $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w} \geq 0$ a $\exists j \in K : \boldsymbol{w}_j < 0$. Dále definujme $\boldsymbol{x}(t) = \bar{\boldsymbol{x}} + t \cdot \boldsymbol{w}$.
Ukážeme nyní, že $\exists t_1 > 0 : \boldsymbol{x}(t_1)$ je přípustné řešení. Kdyby $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t_1) > \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0$, pak $\boldsymbol{x}(t_1)$ má méně nenulových komponent a to nám dává spor.
Vezměme si $t \geq 0$ a definujme:

$$A\boldsymbol{x}(t) = A\bar{\boldsymbol{x}} + t \cdot A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} + 0,$$
$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}} + \underbrace{t \cdot \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w}}_{\geq 0} \geq \boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0.$$

A jelikož víme, že $\boldsymbol{w}_j < 0$, ta zvětšujeme t z nuly, zachováváme $\boldsymbol{x}(t) \geq 0$ a skončíme v okamžiku, kdy jedna kladná složka $\boldsymbol{x}_i = 0$.

(ii) Nechť $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w} < 0$. Kdyby to platilo, tak buď $-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w} = 0$, nebo $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w} > 0$, což obojí implikuje k tomu, že $\boldsymbol{w}$ nebo $-\boldsymbol{w}$ splňuje (i) .

Nebo může nastat $\boldsymbol{w} \geq 0 \implies$ všechna $\boldsymbol{x}(t)$ jsou přípustná řešení $\implies$ jsou neomezené a to nám dává spor.

■

Věta 1.3. *Nechť $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ a $\boldsymbol{v} \in P$, potom je ekvivalentní:*

(1) $\boldsymbol{v}$ je vrchol,

(2) $\boldsymbol{v}$ je přípustné bázické řešení.

Důkaz.

$\Rightarrow$ Plyne z *Věty 1.2* a z definice *vrcholu.*

$\Leftarrow$ Stačí vhodně dodefinovat $\boldsymbol{c}$.

Nechť tedy $\boldsymbol{c}_i = \begin{cases} 0 & i \in B, \\ -1 & i \notin B \end{cases}$ a nechť $\boldsymbol{v}$ odpovídá bázi B.

Platí tedy $\boldsymbol{v} \in P \implies \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq 0$. Takže buď $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{v} = 0$, pak je optimum, nebo $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} < 0$ a pak $\boldsymbol{x}$ má alespoň 1 složku mimo B. A jelikož každé bázi odpovídá nejvýše jedno bázické řešení *(viz. Pozorování 1.1)*, tak $\boldsymbol{v}$ je vrchol.

■

2 Simplexová metoda

Definice 2.1. ***(Simplexová tabulka):*** Definujme proměnné $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{z}$, dále všechny bázické proměnné $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$, $p \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $r \in \mathbb{R}^{n-m}$ a $z_0 \in \mathbb{R}$.
Potom pro bázi B je simplexová tabulka T_B:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= p + Q\boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{z} &= z_0 + r^T\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

a řešením tak je $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, pro $\boldsymbol{x}_N = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{x}_B = p,\ \boldsymbol{z} = z_0$.

Pozorování 2.1. ***(O simplexové tabulce)***

(1) T_B vznikne elementárními řádkovými úpravami z $(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{z} = c^T\boldsymbol{x})$.

(2) Množina řešení $(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{z} = c^T\boldsymbol{x})$ a T_B je stejná.

(3) Řádkové úpravy jsou násobeny maticí zleva.

(4) Řešení $\boldsymbol{x}T_B$ je přípustné $\iff p \geq 0$.

(5) Řešení $\boldsymbol{x}T_B$ je optimální $\iff p \geq 0,\ r \leq 0$.

Definice 2.2. ***(Pivotovací krok) Formálně popsaný převod k další tabulce:***
Máme B bázi, kterou upravíme na $B \cup \{v\} \setminus \{u\}$.

(a) *Vstupující proměnná:* $\boldsymbol{x}_v$, že $r_u > 0$.

(b) *Vystupující proměnná:* $\boldsymbol{x}_u$, že $Q_{uv} < 0$ a $-\frac{p_u}{Q_{uv}} = \min\{-\frac{p_i}{Q_{iv}} \mid i \in B, Q_{iv} < 0\}$.

(c) *Úprava tabulky:* Převedeme $\boldsymbol{x}_v$ na levou stranu a dosadíme.

(d) Pokud neexistuje *vstupující* proměnná $v \implies B$ je *optimální*.
Pokud neexistuje *vystupující* proměnná $u \implies$ úloha je *neomezená* (viz. Pozorování).

(e) Pokud (u, v) existují, tak B' je bazí matice A, protože elementárními řádkovými úpravami dostaneme $T_{B'}$ z T_B. Platí tedy, že $(A_{B'})^{-1}$ existuje a $\det A_{B'} \neq 0$.

Pozorování 2.2. *Pokud je sloupec Q^v matice Q indexovaný $v \in \mathbb{N}$ nezáporný, pak je úloha ST neomezená.*

Důkaz. Nechť $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ je přípustné řešení báze B úlohy ST. Pro $t \geq 0$ nechť:

$$\boldsymbol{x}(t)_B = \boldsymbol{x}_B + Q^v \cdot t, \qquad \boldsymbol{x}(t)_v = 0, \qquad \boldsymbol{x}(t)_w = 0 \text{ pro } w \in \mathbb{N} \setminus \{v\}.$$

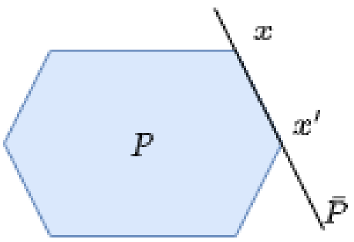
Potom hodnota účelové funkce pro $\boldsymbol{x}(t)$ je $\boldsymbol{z}_0 + t \cdot \boldsymbol{z}_v$.
Navíc tato hodnota pro $t \to \infty$ jde také do ∞ a každé $\boldsymbol{x}(t)$ je přípustné. ∎

3 Pivotovací pravidla geometricky

Definice 3.1. ***(Dantzigovo pravidlo)****:* Pro vstupující proměnnou $\boldsymbol{x}_\beta$ a vystupující $\boldsymbol{x}_\alpha$ vybereme $\beta \in N$ s maximální r_β a zvolíme $\boldsymbol{x}_\alpha$ libovolně z množiny proměnných.

Věta 3.1. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bázické řešení báze B, $\boldsymbol{x}'$ bázické řešení báze $B' := B \setminus \{\alpha\} \cup \{\beta\}$.
Nechť $\bar{B} = B \cup \{\beta\}$ a nechť $\bar{P} := \{\boldsymbol{z} \mid A_{\bar{B}}\boldsymbol{z}_{\bar{B}} = \boldsymbol{b}; \boldsymbol{z}_i = 0, i \notin \bar{B}\}$ je přímka (afinní prostor dimenze 1) a $\boldsymbol{x} \in \bar{P} \ni \boldsymbol{x}'$. Pak $\bar{P}$ definuje stěnu $P = \{\boldsymbol{z} \mid A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{z} \geq 0\}$.*

Důkaz. Definujme $c = (c_1, \dots, c_n)$ předpisem $c_i = 0$ pro $i \in \bar{B}$ a $c_i = -1$ pro $i \notin \bar{B}$. Všimneme si následujících pozorování:



- Pokud $\boldsymbol{y} \in P \implies \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Pokud $\boldsymbol{z} \in \bar{P} \implies \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}_{\bar{B}}^T\boldsymbol{z}_{\bar{B}} = 0$.
- Pokud $\boldsymbol{z} \in \bar{P} \cap P \implies \boldsymbol{z}$ je optimální přípustné řešení (je to stěna).

Pokud $\boldsymbol{z} \in P \setminus \bar{P}$, pak $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$ pro $\boldsymbol{z} \geq 0$ a $\exists i \notin \bar{B} : \boldsymbol{z}_i > 0$. Takže $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{z}_i = -\boldsymbol{z}_i < 0$. ∎

4 Blandovo pravidlo

Definice 4.1. ***(Blandovo pravidlo)****:* Pro vstupující proměnnou $\boldsymbol{x}_t$ a vystupující $\boldsymbol{x}_s$ vybereme nejmenší možné $t \in \mathbb{N}$ a pro něj vybereme nejmenší možný index $s \in B$. Tento postup necyklí, ale je pomalý.

Věta 4.1. *Simplexová metoda s Blandovým pravidlem se nezacyklí.*

Důkaz. Sporem. Nechť $F \subset \{1, \dots, n\}$ je množina indexů vstupující do a vystupujících z cyklu.
Všimněme si, že všechny báze cyklu mají stejné bázické řešení $\boldsymbol{x}$ a navíc $i \in F \implies \boldsymbol{x}_i = 0$.
Nyní definujme v jako největší index v F, B jako bázi kroku, kde v vstoupí do báze a B' jako bázi kroku, kde v vystoupí z báze. Označme p, Q, r, z_0 pro T_B a p', r', Q', z_0' pro $T_{B'}$.

Pozorování 4.1. $r_v > 0,\ r_i \leq 0$ *a to* $\forall i \in F - B \setminus \{v\}$.

Pozorování 4.2. *Nechť β je vstupní index pro B', pak $p'_{v\beta} < 0,\ p'_{i\beta} \geq 0$ a to $\forall i \in B' \cap (F \setminus \{v\})$.*

Vytvoříme pomocný lineární program ($\star$) a ukážeme, že má přípustné řešení a že je neomezené.

$$\max c^T \boldsymbol{x}, \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x}_{F\setminus\{v\}} \geq 0$$
$$\boldsymbol{x}_v \leq 0, \quad \boldsymbol{x}_{N\setminus F} = 0$$
$$\boldsymbol{x}_{B\setminus F} \text{ neomezené.}$$

1. úloha: $\boldsymbol{x}$ je optimální přípustné řešení ($\star$).

(a) $\boldsymbol{x}_N = 0, \quad \boldsymbol{x}_F = 0, \quad \boldsymbol{x}$ je přípustné řešení ($\star$) $c^T\boldsymbol{x} = z_0$.

(b) $\boldsymbol{z}$ splňuje $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} \implies$ hodnota cílové funkce je $c^T\boldsymbol{z} = z_0 + \underbrace{r^T\boldsymbol{x}_N}_{\leq 0 \text{ Poz. 4.2.}} \overbrace{\leq}^{\text{Poz. 4.1.}} z_0$ a to pokud $\boldsymbol{z}$ je přípustné řešení ($\star$).

2. úloha: $\boldsymbol{x}$ je neomezený. Nechť $\boldsymbol{x}$ je bázické řešení pro B'. Všimněme si, že $\boldsymbol{z}$ splňuje $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$. Potom $\boldsymbol{z}_{B'} = p' + Q'_{z_N}, \quad z_{N'} = 0$. Pro $\forall t \geq 0$ tedy definujme $\boldsymbol{x}(t)$:

(1) $(\boldsymbol{x}(t))_i = 0; \quad i \in N' \setminus \{B\}$,

(2) $(\boldsymbol{x}(t))_\beta = t$,

(3) $(\boldsymbol{x}(t))_{B'}$ upravíme tak, aby $A\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}$.

Dostaneme tak, že $c^T\boldsymbol{x}(t) = z'_0 + r'_\beta t \to \infty$ a že $\boldsymbol{x}(t)$ je přípustné řešení ($\star$), což nám dává spor s *úlohou 1.*

$$(\boldsymbol{x}(t))_i = \boldsymbol{x}_i + t \cdot q'_{i\beta} \begin{cases} > 0 & i \in (F \setminus \{v\}) \cap B', \\ = 0 & i \in N \setminus F, \quad \checkmark \\ < 0 & i = v. \end{cases}$$

■

5 Dualita

Definice 5.1. *(Dualita)*: Pro linární program (P) je *duální úloha* (D). Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

(P) $\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \ \ \boldsymbol{x} \geq 0$,

(D) $\max \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \ A^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \ \ \boldsymbol{y} \geq 0$.

Věta 5.1. *(Slabá věta o dualitě)*: *Nechť $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou přípustná řešení (P) a (D), pak $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$.*

Důkaz. Vezmeme nerovnost $A^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a převedeme ji na $\boldsymbol{y}^T A \geq \boldsymbol{c}^T$.
Obě strany vynásobíme $\boldsymbol{x}$, čímž dostaneme $\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ a využijeme vztah z (P), že $\boldsymbol{b} \geq A\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{y}^T b \geq \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

■

Věta 5.2. *(Silná věta o dualitě)*: *Pro (P) a (D) platí právě jedno z následujících:*

1. *(P) ani (D) nemají přípustné řešení,*
2. *(P) je neomezená, (D) nemá přípustné řešení,*
3. *(D) je neomezená, (P) nemá přípustné řešení,*
4. *(P) i (D) mají přípustné, tedy i optimální řešení $\boldsymbol{x}^*$ pro (P) a $\boldsymbol{y}^*$ pro (D) a platí $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*$.*

Důkaz. Předpokládejme, že (P) a (D) mají přípustné řešení $\Longrightarrow$ (D) je omezené $\Longrightarrow$ (D) má optimální řešení. Použijeme Blendovo pravidlo. Bude to sice pomalejší, ale máme jistotu, že se program nezacyklí a že tak dostaneme optimální řešení.

Převedeme tedy úlohu:

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0$$

na ST a dostaneme:

$$\max \bar{\boldsymbol{c}}^T \bar{\boldsymbol{x}},\ \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0,$$

kde $\bar{A} = (A \mid I_m)$ a $\bar{c} = (c \mid O_m^T)$. Označme $\bar{\boldsymbol{x}}^*$ optimální řešení (P) v rovnicovém tvaru.
Poslední řádek v ST bude mít vektor $r \leq 0$.

Lemma 5.1. *Nechť* $\boldsymbol{y}^* = (\bar{\boldsymbol{c}}_B^T, A_B^{-1})$*, kde* $B \subseteq \{1, \ldots, n+m\}$ *je výsledná báze. Potom* $\boldsymbol{y}^*$ *je přípustné pro (D) a* $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*$*, kde* $\bar{\boldsymbol{x}}^* = (\boldsymbol{x}^*, \bar{\boldsymbol{x}}^*_{n+1}, \ldots, \bar{\boldsymbol{x}}^*_{n+m})$.
(Lemma implikuje Větu o dualitě pomocí Slabé věty o dualitě.)

Důkaz:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}}^* = \bar{A}_B^{-1}\boldsymbol{b},\ \bar{\boldsymbol{x}}_N = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* &= \bar{\boldsymbol{c}}^T\bar{\boldsymbol{x}}^* \ = \ \bar{\boldsymbol{c}}_B^T\bar{\boldsymbol{x}}_B \ = \ \bar{\boldsymbol{c}}_B^T(\bar{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}) = \\ &= (\underbrace{\bar{\boldsymbol{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}}_{\boldsymbol{y}^*})\boldsymbol{b} \ = \ (\boldsymbol{y}^*)^T\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

□

Zbývá ukázat, že $\boldsymbol{y}^*$ je přípustné řešení (D), tedy že $A\boldsymbol{y}^* \geq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y}^* \geq 0$.
Ukážeme tedy, že $A\boldsymbol{y}^* \geq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y}^* \geq 0 \iff \bar{A}^T\boldsymbol{y}^* \geq \bar{\boldsymbol{c}},\ \boldsymbol{y}^* \geq 0$.
Přepíšeme $A^{-1}\boldsymbol{y}^* \geq \boldsymbol{c}$ jako $\underbrace{\bar{A}^T(\bar{\boldsymbol{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1})^T}_{w} \geq c$ a definujme $w := (\bar{\boldsymbol{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{A}^T)^T$.

Dokazujeme tedy, že $w \geq \bar{\boldsymbol{c}}$:

(a) $w_B \geq \bar{\boldsymbol{c}}_B$: máme $w_B = (\bar{\boldsymbol{c}}_B^T\cancel{\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_B^T})^T = \bar{\boldsymbol{c}}_B$.

(b) $w_N \geq \bar{\boldsymbol{c}}_N$: máme $w_N = (\bar{\boldsymbol{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N^T)^T = \bar{\boldsymbol{c}}_N - r \geq \bar{\boldsymbol{c}}_N$, protože $r = \bar{\boldsymbol{c}}_N^T - \bar{\boldsymbol{c}}_B^T\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N^T \leq 0$ ze simplexové metody a podle kritéria optimality. Platí tedy $w_N \geq \bar{\boldsymbol{c}}_N$.

Máme tedy $\boldsymbol{x}^*$, k němu odpovídající přípustné řešení $\boldsymbol{y}^*$ takové, že $c^T\boldsymbol{x}^* = b^T\boldsymbol{y}^*$. A jelikož $\boldsymbol{y}^*$ je přípustné $\Longrightarrow$ z *Věty 5.1.* je $\boldsymbol{y}^*$ optimální.

■

Důsledek 5.1. *Úloha LP je algoritmicky ekvivalentní úloze najít* $\boldsymbol{x} \geq 0$*, že* $\tilde{A}\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$.

Důkaz. Mějme LP $\max c^T\boldsymbol{x},\ \ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \geq 0$.

- $\Rightarrow$ ✓

- $\Leftarrow$ Nejprve zjistíme, zda (P) a (D) mají přípustná řešení. Pokud ne, tak *(z Věty 5.2.)* známe řešení LP. Nechť tedy obě mají přípustná řešení a uvažme:

  $$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\quad A^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x} \geq 0,\quad \boldsymbol{y} \geq 0.$$

  Za pomoci *Věty 5.2.* převedeme na rovnicový tvar. Pokud existuje řešení $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$, pak $\boldsymbol{x}^*$ je optimum (P) a $\boldsymbol{y}^*$ je optimum (D).

■

Důsledek 5.2. ***(Podmínky komplementarity):*** *Nechť $\boldsymbol{x}$ je přípustné řešení (P) a $\boldsymbol{y}$ je přípustné řešení (D). Potom $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou optimální $\iff$*

(i) $\boldsymbol{x}_i = 0$, *nebo* $A_i^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_i$, *kde* $i = 1, \dots, n$

(ii) $\boldsymbol{y}_i = 0$, *nebo* $A_j \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_j$, *kde* $j = 1, \dots, m$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_i &\overset{(i)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y}^T A)_i \boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{y}^T A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T (A\boldsymbol{x}) = \\ = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y}_j (A_j \boldsymbol{x}) &\overset{(ii)}{\leq} \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y}_j \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

Pokud jsou přípustné, platí $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ a jsou tedy optimální. ■

6 Farkasovo lemma a dualita

Definice 6.1. ***(Varianty Farkasova lemmatu):***

- $(\exists \boldsymbol{x} \geq 0)(A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}) \iff (\forall \boldsymbol{y} \geq 0)(\boldsymbol{y}^T A \geq 0 \implies \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \geq 0)$
- $(\exists \boldsymbol{x})(A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}) \iff (\forall \boldsymbol{y} \geq 0)(\boldsymbol{y}^T A = 0 \implies \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \geq 0)$

Definice 6.2. ***(Konvexní kužel):*** generovaný $a_1, \dots, a_n$ se definuje

$$cone(a_1, \dots, a_n) = \{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n;\ t_1, \dots, t_m \geq 0\}.$$

Tvrzení 6.1. ***(Farkasovo lemma (geometricky) a souvislost s větou o oddělování):*** *Nastane právě jedna za následujících:*

(i) *Bod* $\boldsymbol{b} \in cone(a_1, \dots, a_n)$

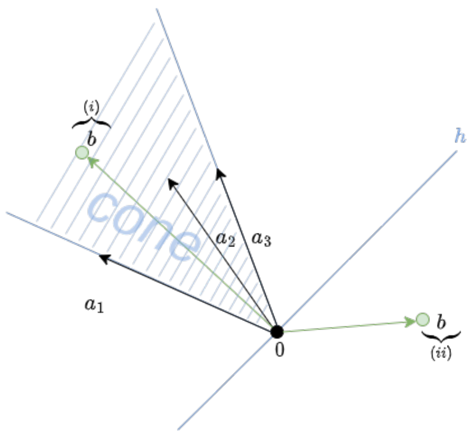
(ii) *Existuje nadrovina* h *obsahující* $0 \in \mathbb{R}^m$, *t.j.* $h = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m;\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = 0\}$ *pro nějaké* $0 \in \mathbb{R}^m$ *tak, že* $cone(a_1, \dots, a_n) \subseteq \{\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} \geq 0\}$ *a zároveň* $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} < 0$.

Tvrzení 6.2. ***(Farkasovo lemma):*** *Nastane právě jedna z následujících:*

(i) $\exists \boldsymbol{x} \geq 0, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

(ii) $\exists \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^T A \geq 0, \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} < 0.$

Důkaz. ■



Farkasovo lemma plyne z *Věty o oddělování.* Vyjádříme geometricky, vezmeme kužel a $\boldsymbol{b} \in cone(a^1, \dots, a^n)$, kde a^i značí $i-$tý sloupec A.

Tvrzení 6.3. *Ferkasovo lemma plyne ze silné věty o dualitě.*

Důkaz. Mějme (P) $\max\{0^T \boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}\}$, (D) $\min\{\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y};\ A^T \boldsymbol{y} = 0;\ \boldsymbol{y} \geq 0\}$.
Platí, že $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení $\iff$ (P) má přípustné řešení a je omezená $\iff$ (D) má přípustné řešení a $0 = \max\{0^T \boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y};\ A^T \boldsymbol{y} = 0;\ \boldsymbol{y} \geq 0\}$. ■

7 Fourier-Motzkinova eliminace

Metoda, kde ze soustavy nerovnic s n proměnnými uděláme soustavu $n-1$ proměnnými tak, že zachová řešitelnost. V podstatě Gaussova eliminace pro nerovnice.

Věta 7.1. ***(Fourier-Motzkinova eliminace):*** *Nechť $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ je systém s n proměnnými a m nerovnicemi. Pak existuje systém $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ s $(n-1)$ proměnnými a nejvýše* $\max(m, \frac{m^2}{4})$ *nerovnicemi splňující:*

(1) $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení $\iff$ $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ má řešení,

(2) Každá nerovnice v $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ je nezáporná lineární kombinace nerovnic systému $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$.

Důkaz. Vynásobíme řádky kladnými čísly $\implies$ A splňuje $a_{i1} \in \{0, 1, -1\}$.
Dále definujme $C = \{i, a_{i1} = 1\}$, $F = \{i, a_{i1} = -1\}$ a $L = \{i, a_{i1} = 0\}$.
Systém $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ splňuje:

(i) $a_j'^T \boldsymbol{x}' + a_k'^T \boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{b}_k$ pro $\forall j \in C,\ k \in F$,

(ii) $a_l'^T \boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}_l$ pro $l \in L$.

Máme tedy *(2)* splněno. Stačí dokázat ekvivalenci v *(1)*.

$\Rightarrow$ Splněno.

$\Leftarrow$ Nechť $\tilde{\boldsymbol{x}}' = (\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}})$ je řešení $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}$. Chceme najít $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}'$, aby $A\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}$.
Z (i) vyplývá vztah $a_k'^T \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}_k \ \leq\ \boldsymbol{b}_j - a_j'^T \boldsymbol{x}'$, pro $\forall j \in C,\ k \in F$. Z toho vyplývá, že:

$$\max_{k \in F} \left(a_k'^T \tilde{\boldsymbol{x}}' - \boldsymbol{b}_k \right) \ \leq\ \min_{j \in C} \left(\boldsymbol{b}_j - a_j'^T \tilde{\boldsymbol{x}}' \right).$$

Zvolíme tedy $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ mezi těmito omezeními.
Takže $j \in C \implies \tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} + a'^T \tilde{\boldsymbol{x}}' \leq \boldsymbol{b}_j'$, analogicky pro $k \in F \implies \tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} + a'^T \tilde{\boldsymbol{x}}' \leq \boldsymbol{b}_k'$.

´ ■

8 Veta o oddělování

Definice 8.1. ***(Konvexní množina)*:** Množina X je *konvexní*, pokud je mezi každými dvěma body $x, y \in X$ mezi nimi úsečka, tj. $t \in [0, 1] : tx + (1-t)y \in X$.

Věta 8.1. ***(O oddělování):*** *Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné, uzavřené, konvexní a disjunktní a C je omezená. Pak existuje nadrovina $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\}$, která silně odděluje C a D, tj. taková, že $C \subseteq \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} < b\}$ a $D \subseteq \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} > b\}$.*

Důkaz. (Náznak důkazu). Vezmeme dva nejbližší body. Pokud je jedna z množin nekonečná, vezmeme vhodné okolí. Pak vezmeme nadrovinu, která je kolmá na vektor bodů (rozdíl) a leží na půli cesty mezi body. Oba body leží na různých stranách, jiné body neleží blíž. ■

9 Minkowski-Weylova věta

Definice 9.1. ***(Diskrétní optimalizace)***: Nechť X je konečná, $\varphi \subseteq 2^x$ a $w : X \to \mathbb{Q}$.
Najděte $\max\limits_{A\in\varphi} w(A)$, kde $w(A) = \sum_{a\in A} w(a)$.

Definice 9.2. ***(Konvexní obal)***: množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ značíme $\operatorname{conv}(X)$ a definujeme jako průnik všech konvexních množin obsahujících X, tedy:

$$\operatorname{conv}(X) = \{C \mid C \text{ je konvexní a } X \subseteq C\}$$

Definice 9.3. ***(Afinní obal)***: množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech afinních prostorů L takových, že $X \subseteq L$.

Definice 9.4. ***(Afinní kombinace)***: bodů z X je libovolný bod daný výrazem $\alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_k a_k$, pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$.

Věta 9.1. ***(Minkowski-Weyl)***: *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pak X je omezený konvexní mnohostěn $\iff$ existuje $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že V je konečná a $X = \operatorname{conv}(V)$.*

Důkaz.

$\Rightarrow$ Indukcí podle $\dim Q$. L je afinní obal $Q \rightsquigarrow \dim L = \dim Q$.

(i) $\dim Q \leq 0 \implies |Q| \leq 1 \implies V = Q$.

(ii) $\dim Q \geq 1 \implies L$ obsahuje přímku $\implies \dim L = d \geq 1$. Pro $i = \{1, \ldots, m\}$, nechť:

$$Q = \{\boldsymbol{x} \mid a_i^T \boldsymbol{x} \leq b\} \qquad P_i = \{\boldsymbol{x} \mid a_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i\}$$
$$R_i = \{\boldsymbol{x} \mid a_i^T \boldsymbol{x} = b\} \qquad M = \{i \mid Q \cap R_i \neq Q\},$$

Jelikož $i \in M \implies \dim(Q \cap R_i) \leq d - 1$, protože $Q \subseteq L \cap R_i \subsetneq L \implies$ dle indukčního předpokladu, že $i \in M \implies Q \cap R_i = \operatorname{conv}(V_i)$, kde $V = \bigcup\limits_{i\in M} V_i$.

Ukážeme, že $Q = \operatorname{conv}(V)$.

- $V_i \subseteq Q \implies V \subseteq Q \implies \operatorname{conv}(V) \subseteq Q$.
- $\boldsymbol{x} \in Q$, p je přímka, $p \subseteq L$, $\boldsymbol{x} \in p$. Víme, že p existuje, protože $\dim L \geq 1$.
  Takže $\boldsymbol{x} \in p \cap Q = p \cap (\bigcap P_i;\ i \in M) = \bigcap\limits_{i\in M} (p \cap P_i) \neq 0$, takže $p \cap Q$ je úsečka s koncovými body $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$: $\boldsymbol{y} \in R_i,\ \boldsymbol{z} \in R_j$, pro $i, j \in M$.
  A tedy $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \operatorname{conv}(V)$, $\boldsymbol{x}$ leží na úsečkách $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \implies \boldsymbol{x} \in \operatorname{conv}(V) \implies Q \subseteq \operatorname{conv}(V)$.

$\Leftarrow$ Nechť $V \in \mathbb{R}^n$ je konečná a $X = \operatorname{conv}(V)$.

Dále nechť $H = \{\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a \in [-1,1]^n,\ b \in [-1,1],\ (\forall \boldsymbol{v} \in V)(a^T \boldsymbol{v} \leq b)\}$ je omezený mnohostěn. Podle " $\Rightarrow$ " je $H = \operatorname{conv}(W)$ pro nějaké konečné W.

Platí $Y := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \binom{a}{b} \in W)(a^T \boldsymbol{x} \leq b)\}$ a ukážeme, že $\operatorname{conv}(V) = Y$.

- Dle definice $V \subseteq Y \implies \operatorname{conv}(V) \subseteq Y$.
- Pro důkaz $Y \subseteq \operatorname{conv}(V)$ nechť $\boldsymbol{x} \notin \operatorname{conv}(V) \implies$ Věta o oddělování *(8.1.)* $\implies \exists a, b :\ a^T \boldsymbol{x} > b,\ (\forall \boldsymbol{v} \in V)(a^T \boldsymbol{v} < b) \implies \binom{a}{b} \in H \implies \boldsymbol{x}$ nesplňuje nerovnost z $H \implies \boldsymbol{x}$ nesplňuje nerovnost z $W \implies \boldsymbol{x} \notin Y$.

∎

Důsledek 9.1. *Každá úloha diskrétní optimalizace je úloha lineárního programování.*

Důkaz. $P_\varphi = \operatorname{conv}(\boldsymbol{x}_A \mid A \in \varphi) \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $\boldsymbol{x}_A$ je charakteristický vektor.
Z Minkowski-Weylovy věty *(9.1.)* víme, že P_φ je mnohostěn $\implies$ jde řešit pomocí lineárního programu. ∎

10 Racionální a celočíselné mnohostěny

Definice 10.1. ***(Celočíselný mnohostěn)***: P je *celočíselný* $\iff$ má všechny vrcholy celočíselné.

Definice 10.2. ***(Racionální mnohostěn)***: P je *racionální* $\iff$ $P = \{\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ a všechny složky A i b jsou racionální.

Věta 10.1. *Nechť P je racionální, potom všechny vrcholy P jsou racionální a jsou dosvědčeny racionální cílovou funkcí.*

Důkaz. Pro rovnicový tvar $P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = b,\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$.
Vrcholy P odpovídají bázickým řešením

$$A\boldsymbol{x} = b,\ \boldsymbol{x} \geq 0 \implies \exists B \in \{1, \dots, n\},\ |B| = m,$$

že $A_B v_B = b,\ v_N = 0,\ N = \{1, \dots, n\} \setminus B$.
Tedy v_B je jediné řešení, a to $v_B = b \cdot A_B^{-1} \implies v$ je racionální.
(Pro nestandardně popsaný P odpovídají vrcholy $A\boldsymbol{x} \leq b$). ■

Věta 10.2. *Mnohostěn P je celočíselný $\iff$ pro každý celočíselné w platí, že* $\max\{w^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in P\}$ *je celé číslo.*

Důkaz.

- $\Rightarrow$ $\max w^T\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in P$ se nebývá ve vrcholu $\boldsymbol{z} \implies \max w^T\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in P = w^T\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}$.
- $\Leftarrow$ Nechť $\boldsymbol{z}$ je vrchol $\implies$ $\boldsymbol{z}$ je optimum $\max w^T\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in P$, pro nějaké $w \in \mathbb{Z}$.

  Vynásobíme w velkým číslem, aby pro každý vrchol $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{z}:\ w^T\boldsymbol{z} > w^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{z}_1$.

  A tedy $\boldsymbol{z}$ je jediné optimální řešení pro w i pro $\bar{w} = (w_1 + 1, w_2, \dots) \implies w^T\boldsymbol{z}, \bar{w}^T\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z} \implies \boldsymbol{z}_1 \in \mathbb{Z} \implies \boldsymbol{z}$ je celočíselné.

■

11 TU matice a Hoffman-Kruskalova věta

Definice 11.1. ***(Unimodulární matice)***: Matice A s lineárně nezávislými řádky je *unimodulární*, pokud je A celočíselná a pokud pro každou bázi $B:\ \det(A_B) \in \{-1, 1\}$.

Definice 11.2. ***(Totálně unimodulární matice)***: Matice A je *totálně unimodulární*, pokud každá čtvercová podmatice má $\det \in \{-1, 0, 1\}$.

Věta 11.1. *Nechť $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ je celočíselná s* $\det A \neq 0$, *pak pro každý celočíselný vektor b platí, že*

$$A^{-1}b \text{ je celočíselné} \iff \det A \in \{-1, 1\}.$$

Důkaz.

- $\Leftarrow$ Cramerovo pravidlo $\implies A^{-1}$ je celočíselný.
- $\Rightarrow$ $A^{-1}e_i$ je celočíselný $\iff$ i-tý sloupec A^{-1} je celočíselný $\implies$
  $\implies A^{-1}$ je celočíselné, ale $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \implies \det(A) \in \{-1, 1\}$.

■

Věta 11.2. *Nechť A je celočíselná a má lineárně nezávislé řádky, potom $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = b,\ \boldsymbol{x} > 0\}$ je celočíselné pro každé $b \in \mathbb{Z} \iff A$ je unimodulární.*

Důkaz.

- $\Leftarrow$ Každý vrchol je bázické řešení pro bázi $B \implies A_B\boldsymbol{z}_B = b,\ Z_{N\backslash B} = 0 \implies \boldsymbol{z}_B = A^{-1}b \implies$ je celočíselné *(viz. Věta 11.1.)* .
- $\Rightarrow$ Stačí dokázat, že $A_B^{-1}b$ je celočíselné pro každé $b \in \mathbb{Z}$ a bázi B.

  Nechť $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}$ splňuje $\boldsymbol{y} + A_B^{-1}b \geq 0$ a nechť $\bar{b} = A_B(\boldsymbol{y} + A_B^{-1}b)$, kde $\bar{b}$ je celočíselný.

  Definujme $\boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{y} + A_B^{-1}b,\ \boldsymbol{z}_{N\backslash B} = 0 \implies \boldsymbol{z}$ je bázické řešení $(A\boldsymbol{x} = \bar{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0) \implies \boldsymbol{z}$ je vrchol $\implies \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z} \implies \boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{y} + A_B^{-1}b$ je celočíselný $\implies A_B^{-1}b$ je celočíselný.

$\blacksquare$

Věta 11.3. ***(Hoffman-Kruskal)**: Nechť $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq b,\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$ je celočíselný pro každé $b \in \mathbb{Z} \iff$ každá čtvercová podmatice A má $\det A \in \{-1, 0, 1\}$.*

Důkaz. Dodáme pomocné proměnné a převedeme na standardní tvar. Tedy P převedeme na ST.

$$\begin{aligned}
P \text{ je celočíselný} &\iff \max(w^T\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in P) \text{ je celé číslo } \forall w \in \mathbb{Z}^n \\
&\iff P' = \{\boldsymbol{z} \mid [A|I]\boldsymbol{z} = b,\ \boldsymbol{z} \geq 0\} \text{ je celočíselný } \forall b \in \mathbb{Z} \\
&\iff [A|I] \text{ je unimodulární} \quad \textit{(viz. věta 11.2.)} \\
&\iff \text{každá báze má } \det = 1, \text{ nebo } \det = -1 \\
&\iff A \text{ je totálně unimodulární.}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

12 Chvátalovy řezy

Definice 12.1. ***(Gomory-Chvátalův řez)**:* Pro $A\boldsymbol{x} \leq b,\ A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $\boldsymbol{y} \geq 0$, $c = \boldsymbol{y}^TA$, $d = \boldsymbol{y}^Tb$. Pokud c je celočíselné, potom podmínka $c^T\boldsymbol{x} \leq \lfloor d \rfloor$ se nazývá *řez*.

Definice 12.2. ***(Chvátalův uzávěr)**:* $P' = \{\boldsymbol{x} \in P \mid \boldsymbol{x}$ splňuje každý řez $\}$.

Věta 12.1. ***(O Chvátalově řezu)**: Nechť $P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq b\}$ je racionální mnohostěn, $w^T\boldsymbol{x} \leq t$, $w \in \mathbb{Z}^n$ je splněno pro $\forall \boldsymbol{x} \in P \cap \mathbb{Z}^n$. Potom existuje důkaz $w^T\boldsymbol{x} \leq t'$, pro $t' \leq t$.*

Věta 12.2. ***(O Chvátalově řezu)**: $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset \implies$ existuje odvození "$0^t\boldsymbol{x} \leq -1$".*

Pozorování 12.1. *$P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq b\}$ je racionální mnohostěn, P_I je konvexní obal celočíselných bodů P a $P' = \{\boldsymbol{x} \in P \mid \boldsymbol{x}$ splňuje každý řez $\}$.*

Věta 12.3. *Chvátalův uzávěr je racionální mnohostěn.*

Důkaz. Mějme $P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq b\}$ a předpokládejme, že $A, b \in \mathbb{Z}$.

$$* \begin{cases} P' \text{ je definované podmínkami } A\boldsymbol{x} \leq b \textit{ a nerovnicemi } (\boldsymbol{y}^TA)x \leq \lfloor \boldsymbol{y}^Tb \rfloor,\ 0 \leq \boldsymbol{y} \leq 1. \\ \textit{(protože podmínek je konečně mnoho, tak } P' \textit{ je racionální mnohostěn)} \end{cases}$$

Nechť $w^T\boldsymbol{x} \leq \lfloor t \rfloor$ je řez odvozený z $A\boldsymbol{x} \leq b$ vektorem $\boldsymbol{y}$ a nechť

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \lfloor \boldsymbol{y} \rfloor \implies w' = (\boldsymbol{y}')^TA = w - (\lfloor \boldsymbol{y} \rfloor)^TA$$

je celočíselné.
Jelikož $t' = (\boldsymbol{y}')^Tb = t - (\lfloor \boldsymbol{y} \rfloor)^Tb$ se liší o celé číslo od t, tak řez $(w')^T\boldsymbol{x} \leq \lfloor t' \rfloor$ odvozený vektor $\boldsymbol{y}'$ je podmínka z $*$ a společně s platnou nerovností

$$((\lfloor \boldsymbol{y} \rfloor)^TA)\boldsymbol{x} \leq (\lfloor \boldsymbol{y} \rfloor)^Tb,$$

se sečte na podmínku $w^T\boldsymbol{x} \leq \lfloor t \rfloor \implies * \implies P'$ je racionální mnohostěn. $\blacksquare$

13 Primární dualní algoritmy

Definice 13.1. ***(T-join)*** $G = (V, E)$ je graf, $T \subseteq V$, $|V|$ je sudá, $E' \subseteq E$ je *T-join*, jestli pro graf $H = (V, E')$ platí, že $\deg_H(v)$ je lichý $\iff v \in T$.

Definice 13.2. ***(P-D algoritmus)*** Algoritmus založený na podmínkách komplementarity. Pokud $\boldsymbol{x}$ je přípustné řešení (P) a $\boldsymbol{y}$ pro (D), pak

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ jsou optimální } \iff (\forall u, v \in E)(\boldsymbol{x}_{u,v} > 0 \implies \boldsymbol{y}_u + \boldsymbol{y}_v = c_{u,v}).$$

Příklad 13.1. ***(Minimální perfektní párování)***

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad \min \sum c_e \boldsymbol{x}_e \\ \forall v \in V : \sum_{v \in e} \boldsymbol{x}_e = 1 \\ \boldsymbol{x}_e \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \text{(D)} \quad \max \sum \boldsymbol{y}_v \\ \forall u, v \in E : \boldsymbol{y}_u + \boldsymbol{y}_v \leq e_{u,v} \end{aligned}$$

Postupně upravujeme $(M, \boldsymbol{y})$, kde M je párování v G a $\boldsymbol{y}$ je přípustné řešení (D).
`Začátek:` $M \neq \emptyset, \quad \boldsymbol{y} = 0$
`Konec:` Pokud M je perfektní $\implies (M, \boldsymbol{y})$ je optimum (P). To vychází z podmínek komplementarity.

Je to podobné jako kytičkový algoritmus.

Zdroje

Čerpal jsem z vlastních poznámek z hodin plus:

- skripta prof. Jiřího Sgalla
- zápisky z přednášek od Štěpána Vodseďálka
- "skripta" (ručně psaná) přednášejícího prof. Martina Loebla