

Lineární programování a kombinatorická optimalizace - příprava na zkoušku

KAREL VELIČKA

10. září 2024

Vyučující: *prof. RNDr. Martin Loeb, CSc.*

Obsah

1	Standardní tvar LP, vrchol, stěny, bázecká řešení	2
2	Simplexová metoda	4
3	Pivotovací pravidla geometricky	5
4	Blandovo pravidlo	5
5	Dualita	6
6	Farkasovo lemma a dualita	8
7	Fourier-Motzkinova eliminace	9
8	Věta o oddělování	9
9	Minkowski-Weylova věta	10
10	Racionální a celočíselné mnohostěny	11
11	TU matice a Hoffman-Kruskalova věta	11
12	Chvátalovy řezy	12
13	Primární dualní algoritmy	13

1 Standardní tvar LP, vrchol, stěny, bázecká řešení

Definice 1.1. (*Úloha LP v kanonickém tvaru*) je následující optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{za podmínek} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array}$$

Definice 1.2. (*Úloha LP v rovnícovém/ standardním tvaru*) je následující optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in [0, \infty)^n \\ \text{za podmínek} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array}$$

Definice 1.3. (*Úloha celočíselného lineárního programování*) je následující optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \\ \text{za podmínek} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array}$$

Definice 1.4. (*Báze matice*) $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ je báze matice A , jestliže $A_B \neq 0$

Definice 1.5. (*Množina přípustných řešení*) je množina $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$.

Definice 1.6. (*Bázecké řešení*) je $\mathbf{x} \in P$, pokud existuje báze B matice A taková, že $\mathbf{x}_i = 0$ pro každé $i \notin B$.

Definice 1.7. (*Konvexní mnohostěn*) je průnikem konečně mnoha poloprostorů:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}.$$

Definice 1.8. (*Dimenze konvexního mnohostěnu*): $\dim P = \max d$, t.ž. $\exists \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \subseteq P$ takové, že $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0$ jsou afinně (tedy i lineárně) nezávislé. (*platí $\dim\{\mathbf{x}_0\} = 0, \dim \emptyset = -1$.*)

Definice 1.9. (*Vrchol*): značíme $\mathbf{v} \in P \subseteq \mathbb{R}^n$, pokud existuje $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, že $\mathbf{c}^T \mathbf{v} > \mathbf{c}^T \mathbf{y}$, pro každé $\mathbf{y} \in P \setminus \{\mathbf{v}\}$.

Definice 1.10. (*k-dimenzionální stěna*): je $F \subseteq P$, pokud F je k -dimenzionální konvexní mnohostěn a pokud $(\exists \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(\mathbf{z} \in \mathbb{R}) : (\forall \mathbf{y} \in F)(\mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{z})$ a zároveň $(\forall \mathbf{y} \in P \setminus F)(\mathbf{c}^T \mathbf{y} < \mathbf{z})$.

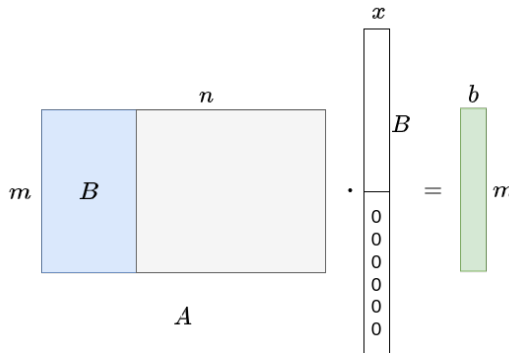
Věta 1.1. Každou úlohu LP lze převést na standardní tvar.

Důkaz:

- (i) Rovnice na nerovnice: $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightsquigarrow A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \wedge A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$
- (ii) Nerovnice na rovnice: $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \rightsquigarrow A\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{b}; \mathbf{z} \geq 0$
- (iii) Nezáporné na neomezené proměnné: $\mathbf{x} \geq 0 \rightsquigarrow$ přidáme podmínky na nezápornost jako nerovnice
- (iv) Neomezené na nezáporné proměnné: $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbf{x}_i^+ - \mathbf{x}_i^-; \mathbf{x}_i^+ \geq 0, \mathbf{x}_i^- \geq 0$

Pozorování 1.1. Každé bázi přísluší nejvýše jedno báziké řešení.

Důkaz:



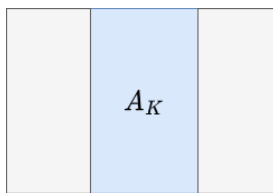
$$A_B x_B = b = \begin{cases} x_B \geq 0 & \mathbf{x} \text{ je báziké řešení,} \\ x_B < 0 & \mathbf{x} \text{ není báziké řešení.} \end{cases}$$

Pozorování 1.2. Řešení $\mathbf{x} \in P$ je báziké \iff sloupce matice A_K , kde $K = \{i \mid x_i > 0\}$, jsou lineárně nezávislé.

Důkaz:

\Rightarrow \mathbf{x} odpovídá bázi B ; $K \subset B \rightsquigarrow$ z definice

\Leftarrow



$|K| = m \implies K$ je báze
 $|K| < m \implies$ rozšíříme K na bázi K' .
 \mathbf{x} je pak jediným řešením soustavy $A_{K'} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Věta 1.2. Je-li účelová funkce $(\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0)$ s alespoň jedním přípustným řešením shora omezená na množině P přípustných řešení, potom pro každé $\mathbf{x}_0 \in P$ existuje báziké řešení $\bar{\mathbf{x}}$ splňující $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$.

Důkaz:

Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in P$ splňuje $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$ a zároveň má $\bar{\mathbf{x}}$ minimální počet nenulových komponent. Ukážeme, že je $\bar{\mathbf{x}}$ báziké.

Nechť $K = \{\bar{x}_j > 0 \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$.

(a) Sloupce matice A_K jsou lineárně nezávislé $\implies \bar{\mathbf{x}}$ je báziké řešení (viz. Pozorování 1.2).

(b) Sloupce A_K jsou lineárně závislé. To povedeme ke sporu.

Jelikož jsou závislé, tak $\exists \tilde{\mathbf{w}} \neq 0$ takové, že $A_K \tilde{\mathbf{w}} = 0$. To doplníme nulami na $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{w} \neq 0$ a $A\mathbf{w} = 0$.

(i) Nechť platí $\mathbf{c}^T \mathbf{w} \geq 0$ a $\exists j \in K : w_j < 0$. Dále definujme $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + t \cdot \mathbf{w}$.

Ukážeme nyní, že $\exists t_1 > 0 : \mathbf{x}(t_1)$ je přípustné řešení. Kdyby $\mathbf{c}^T \mathbf{x}(t_1) > \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0$, pak $\mathbf{x}(t_1)$ má méně nenulových komponent a to nám dává spor.

Vezměme si $t \geq 0$ a definujme:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}(t) &= A\bar{\mathbf{x}} + t \cdot A\mathbf{w} = \mathbf{b} + 0, \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) &= \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} + \underbrace{t \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{w}}_{\geq 0} \geq \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

A jelikož víme, že $w_j < 0$, ta zvětšujeme t z nuly, zachováváme $\mathbf{x}(t) \geq 0$ a skončíme v okamžiku, kdy jedna kladná složka $x_i = 0$.

- (ii) Nechť $\mathbf{c}^T \mathbf{w} < 0$. Kdyby to platilo, tak buď $-\mathbf{c}^T \mathbf{w} = 0$, nebo $\mathbf{c}^T \mathbf{w} > 0$, což obojí implikuje k tomu, že \mathbf{w} nebo $-\mathbf{w}$ splňuje (i) .

Nebo může nastat $\mathbf{w} \geq 0 \implies$ všechna $\mathbf{x}(t)$ jsou přípustná řešení \implies jsou neomezené a to nám dává spor. ■

Věta 1.3. *Nechť $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ a $\mathbf{v} \in P$, potom je ekvivalentní:*

- (1) \mathbf{v} je vrchol,
- (2) \mathbf{v} je přípustné bázecké řešení.

Důkaz:

\implies Plyne z Věty 1.2 a z definice vrcholu.

\Leftarrow Stačí vhodně dodefinovat \mathbf{c} .

Nechť tedy $\mathbf{c}_i = \begin{cases} 0 & i \in B, \\ -1 & i \notin B \end{cases}$ a nechť \mathbf{v} odpovídá bázi B .

Platí tedy $\mathbf{v} \in P \implies \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq 0$. Takže buď $\mathbf{c}^T \mathbf{v} = 0$, pak je optimum, nebo $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < 0$ a pak \mathbf{x} má alespoň 1 složku mimo B . A jelikož každé bázi odpovídá nejvýše jedno bázecké řešení (viz. Pozorování 1.1), tak \mathbf{v} je vrchol. ■

2 Simplexová metoda

Definice 2.1. (Simplexová tabulka): Definujme proměnné $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}$, dále všechny bázecké proměnné $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$, $p \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $r \in \mathbb{R}^{n-m}$ a $z_0 \in \mathbb{R}$.

Potom pro bázi B je simplexová tabulka T_B :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= p + Q\mathbf{x}_N \\ \mathbf{z} &= z_0 + r^T \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

a řešením tak je (\mathbf{x}, \mathbf{z}) , pro $\mathbf{x}_N = 0 \rightsquigarrow \mathbf{x}_B = p, \mathbf{z} = z_0$.

Pozorování 2.1. (O simplexové tabulce)

- (1) T_B vznikne elementárními řádkovými úpravami z $(A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{z} = \mathbf{c}^T \mathbf{x})$.
- (2) Množina řešení $(A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{z} = \mathbf{c}^T \mathbf{x})$ a T_B je stejná.
- (3) Řádkové úpravy jsou násobeny maticí zleva.
- (4) Řešení $\mathbf{x}T_B$ je přípustné $\iff p \geq 0$.
- (5) Řešení $\mathbf{x}T_B$ je optimální $\iff p \geq 0, r \leq 0$.

Definice 2.2. (Pivotovací krok) Formálně popsany převod k další tabulce:

Máme B bázi, kterou upravíme na $B \cup \{v\} \setminus \{u\}$.

- (a) *Vstupující proměnná:* \mathbf{x}_v , že $r_u > 0$.
- (b) *Vystupující proměnná:* \mathbf{x}_u , že $Q_{uv} < 0$ a $-\frac{p_u}{Q_{uv}} = \min\{-\frac{p_i}{Q_{iv}} \mid i \in B, Q_{iv} < 0\}$.
- (c) *Úprava tabulky:* Převodeme \mathbf{x}_v na levou stranu a dosadíme.

(d) Pokud neexistuje vstupující proměnná $v \implies B$ je optimální.

Pokud neexistuje vystupující proměnná $u \implies$ úloha je neomezená (viz. Pozorování).

(e) Pokud (u, v) existují, tak B' je bází matice A , protože elementárními řádkovými úpravami dostaneme $T_{B'}$ z T_B . Platí tedy, že $(A_{B'})^{-1}$ existuje a $\det A_{B'} \neq 0$.

Pozorování 2.2. Pokud je sloupec Q^v matice Q indexovaný $v \in \mathbb{N}$ nezáporný, pak je úloha ST neomezená.

Důkaz: Nechť (\mathbf{x}, \mathbf{z}) je přípustné řešení báze B úlohy ST. Pro $t \geq 0$ nechť:

$$\mathbf{x}(t)_B = \mathbf{x}_B + Q^v \cdot t, \quad \mathbf{x}(t)_v = 0, \quad \mathbf{x}(t)_w = 0 \text{ pro } w \in \mathbb{N} \setminus \{v\}.$$

Potom hodnota účelové funkce pro $\mathbf{x}(t)$ je $\mathbf{z}_0 + t \cdot \mathbf{z}_v$.

Navíc tato hodnota pro $t \rightarrow \infty$ jde také do ∞ a každé $\mathbf{x}(t)$ je přípustné. ■

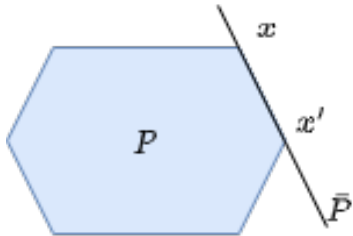
3 Pivotovací pravidla geometricky

Definice 3.1. (Dantzigovo pravidlo): Pro vstupující proměnnou \mathbf{x}_β a vystupující \mathbf{x}_α vybereme $\beta \in N$ s maximální r_β a zvolíme \mathbf{x}_α libovolně z množiny proměnných.

Věta 3.1. Nechť \mathbf{x} je bážické řešení báze B , \mathbf{x}' bážické řešení báze $B' := B \setminus \{\alpha\} \cup \{\beta\}$.

Nechť $\bar{B} = B \cup \{\beta\}$ a nechť $\bar{P} := \{\mathbf{z} \mid A_{\bar{B}}\mathbf{z}_{\bar{B}} = \mathbf{b}; \mathbf{z}_i = 0, i \notin \bar{B}\}$ je přímka (afinní prostor dimenze 1) a $\mathbf{x} \in \bar{P} \ni \mathbf{x}'$. Pak \bar{P} definuje stěnu $P = \{\mathbf{z} \mid A\mathbf{z} = \mathbf{b}, \mathbf{z} \geq 0\}$.

Důkaz: Definujme $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ předpisem $c_i = 0$ pro $i \in \bar{B}$ a $c_i = -1$ pro $i \notin \bar{B}$. Všimneme si následujících pozorování:



- Pokud $\mathbf{y} \in P \implies \mathbf{c}^T \mathbf{y} = 0$.
- Pokud $\mathbf{z} \in \bar{P} \implies \mathbf{c}^T \mathbf{z} = \mathbf{c}_{\bar{B}}^T \mathbf{z}_{\bar{B}} = 0$.
- Pokud $\mathbf{z} \in \bar{P} \cap P \implies \mathbf{z}$ je optimální přípustné řešení (je to stěna).

Pokud $\mathbf{z} \in P \setminus \bar{P}$, pak $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$ pro $\mathbf{z} \geq 0$ a $\exists i \notin \bar{B} : \mathbf{z}_i > 0$. Takže $\mathbf{c}^T \mathbf{z} \leq \mathbf{c}_i \mathbf{z}_i = -\mathbf{z}_i < 0$. ■

4 Blandovo pravidlo

Definice 4.1. (Blandovo pravidlo): Pro vstupující proměnnou \mathbf{x}_t a vystupující \mathbf{x}_s vybereme nejmenší možné $t \in \mathbb{N}$ a pro něj vybereme nejmenší možný index $s \in B$. Tento postup necyklí, ale je pomalý.

Věta 4.1. Simplexová metoda s Blandovým pravidlem se nezacyklí.

Důkaz: Sporem. Nechť $F \subset \{1, \dots, n\}$ je množina indexů vstupujících do a vystupujících z cyklu. Všimněme si, že všechny báze cyklu mají stejné bážické řešení \mathbf{x} a navíc $i \in F \implies \mathbf{x}_i = 0$.

Nyní definujme v jako největší index v F , B jako bázi kroku, kde v vstoupí do báze a B' jako bázi kroku, kde v vystoupí z báze. Označme p, Q, r, z_0 pro T_B a p', r', Q', z'_0 pro $T_{B'}$.

Pozorování 4.1. $r_v > 0$, $r_i \leq 0$ a to $\forall i \in F - B \setminus \{v\}$.

Pozorování 4.2. Nechť β je vstupní index pro B' , pak $p'_{v\beta} < 0$, $p'_{i\beta} \geq 0$ a to $\forall i \in B' \cap (F \setminus \{v\})$.

Vytvoříme pomocný lineární program (\star) a ukážeme, že má přípustné řešení a že je neomezené.

$$\begin{aligned} \max c^T \mathbf{x}, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{F \setminus \{v\}} \geq 0 \\ \mathbf{x}_v \leq 0, \quad \mathbf{x}_{N \setminus F} = 0 \\ \mathbf{x}_{B \setminus F} \text{ neomezené.} \end{aligned}$$

1. *úloha*: \mathbf{x} je optimální přípustné řešení (\star) .

(a) $\mathbf{x}_N = 0, \mathbf{x}_F = 0, \mathbf{x}$ je přípustné řešení (\star) $c^T \mathbf{x} = z_0$.

(b) \mathbf{z} splňuje $A\mathbf{z} = \mathbf{b} \implies$ hodnota cílové funkce je $c^T \mathbf{z} = z_0 + \underbrace{r^T \mathbf{x}_N}_{\leq 0 \text{ Poz. 4.2.}} \overset{\text{Poz. 4.1.}}{\leq} z_0$ a to pokud \mathbf{z} je přípustné řešení (\star) .

2. *úloha*: \mathbf{x} je neomezený. Nechť \mathbf{x} je báze řešení pro B' . Všimněme si, že \mathbf{z} splňuje $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$. Potom $\mathbf{z}_{B'} = \mathbf{p}' + Q'_{z_N}, \mathbf{z}_{N'} = 0$. Pro $\forall t \geq 0$ tedy definujeme $\mathbf{x}(t)$:

$$(1) (\mathbf{x}(t))_i = 0; \quad i \in N' \setminus \{B\},$$

$$(2) (\mathbf{x}(t))_\beta = t,$$

$$(3) (\mathbf{x}(t))_{B'} \text{ upravíme tak, aby } A\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}.$$

Dostaneme tak, že $c^T \mathbf{x}(t) = z'_0 + r'_\beta t \rightarrow \infty$ a že $\mathbf{x}(t)$ je přípustné řešení (\star) , což nám dává spor s *úlohou 1*.

$$(\mathbf{x}(t))_i = \mathbf{x}_i + t \cdot q'_{i\beta} \begin{cases} > 0 & i \in (F \setminus \{v\}) \cap B', \\ = 0 & i \in N \setminus F, \quad \checkmark \\ < 0 & i = v. \end{cases}$$

■

5 Dualita

Definice 5.1. (*Dualita*): Pro lineární program (P) je *duální úloha* (D). Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$(P) \max c^T \mathbf{x}, \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0,$$

$$(D) \max \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq 0.$$

Věta 5.1. (*Slabá věta o dualitě*): Nechť \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou přípustná řešení (P) a (D), pak $c^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz: Vezmeme nerovnost $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ a převedeme ji na $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{c}^T$.

Obě strany vynásobíme \mathbf{x} , čímž dostaneme $\mathbf{y}^T A\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ a využijeme vztah z (P), že $\mathbf{b} \geq A\mathbf{x}$:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

■

Věta 5.2. (*Silná věta o dualitě*): Pro (P) a (D) platí právě jedno z následujících:

1. (P) ani (D) nemají přípustné řešení,
2. (P) je neomezená, (D) nemá přípustné řešení,
3. (D) je neomezená, (P) nemá přípustné řešení,
4. (P) i (D) mají přípustné, tedy i optimální řešení \mathbf{x}^* pro (P) a \mathbf{y}^* pro (D) a platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$.

Důkaz: Předpokládejme, že (P) a (D) mají přípustné řešení \implies (D) je omezené \implies (D) má optimální řešení. Použijeme Blendovo pravidlo. Bude to sice pomalejší, ale máme jistotu, že se program nezacyklí a že tak dostaneme optimální řešení.

Převedeme tedy úlohu:

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

na ST a dostaneme:

$$\max \bar{\mathbf{c}}^T \bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0,$$

kde $\bar{A} = (A \mid I_m)$ a $\bar{\mathbf{c}} = (\mathbf{c} \mid \mathbf{0}_m^T)$. Označme $\bar{\mathbf{x}}^*$ optimální řešení (P) v rovnicovém tvaru. Poslední řádek v ST bude mít vektor $r \leq 0$.

Lemma 5.1. *Nechť $\mathbf{y}^* = (\bar{\mathbf{c}}_B^T, A_B^{-1})$, kde $B \subseteq \{1, \dots, n+m\}$ je výsledná báze. Potom \mathbf{y}^* je přípustné pro (D) a $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$, kde $\bar{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{x}^*, \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^*, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{n+m}^*)$. (Lemma implikuje Větu o dualitě pomocí Slabé věty o dualitě.)*

Důkaz:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^* = \bar{A}_B^{-1} \mathbf{b}, \quad \bar{\mathbf{x}}_N = 0 &\implies \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{c}}^T \bar{\mathbf{x}}^* = \bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{\mathbf{x}}_B = \bar{\mathbf{c}}_B^T (\bar{A}_B^{-1} \mathbf{b}) = \\ &= \underbrace{(\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})}_{\mathbf{y}^*} \mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

□

Zbývá ukázat, že \mathbf{y}^* je přípustné řešení (D), tedy že $A\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y}^* \geq 0$.

Ukážeme tedy, že $A\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y}^* \geq 0 \iff \bar{A}^T \mathbf{y}^* \geq \bar{\mathbf{c}}$, $\mathbf{y}^* \geq 0$.

Přepíšeme $A^{-1} \mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ jako $\underbrace{\bar{A}^T (\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T}_w \geq \mathbf{c}$ a definujeme $w := (\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}^T)^T$.

Dokazujeme tedy, že $w \geq \bar{\mathbf{c}}$:

(a) $w_B \geq \bar{\mathbf{c}}_B$: máme $w_B = (\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_B^T)^T = \bar{\mathbf{c}}_B$.

(b) $w_N \geq \bar{\mathbf{c}}_N$: máme $w_N = (\bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_N^T)^T = \bar{\mathbf{c}}_N - r \geq \bar{\mathbf{c}}_N$, protože $r = \bar{\mathbf{c}}_N^T - \bar{\mathbf{c}}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_N^T \leq 0$ ze simplexové metody a podle kritéria optimality. Platí tedy $w_N \geq \bar{\mathbf{c}}_N$.

Máme tedy \mathbf{x}^* , k němu odpovídající přípustné řešení \mathbf{y}^* takové, že $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$. A jelikož \mathbf{y}^* je přípustné \implies z Věty 5.1. je \mathbf{y}^* optimální. ■

Důsledek 5.1. *Úloha LP je algoritmicky ekvivalentní úloze najít $\mathbf{x} \geq 0$, že $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$.*

Důkaz: Mějme LP $\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$.

$\Rightarrow \checkmark$

\Leftarrow Nejprve zjistíme, zda (P) a (D) mají přípustná řešení. Pokud ne, tak (z Věty 5.2.) známe řešení LP. Nechť tedy obě mají přípustná řešení a uvažme:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{y} \geq 0.$$

Za pomoci Věty 5.2. převedeme na rovnicový tvar. Pokud existuje řešení $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, pak \mathbf{x}^* je optimum (P) a \mathbf{y}^* je optimum (D). ■

Důsledek 5.2. (Podmínky komplementarity): Nechť \mathbf{x} je přípustné řešení (P) a \mathbf{y} je přípustné řešení (D). Potom \mathbf{x}, \mathbf{y} jsou optimální \iff

(i) $\mathbf{x}_i = 0$, nebo $A_i^T \mathbf{y} = \mathbf{c}_i$, kde $i = 1, \dots, n$

(ii) $\mathbf{y}_j = 0$, nebo $A_j \mathbf{x} = \mathbf{b}_j$, kde $j = 1, \dots, m$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i \stackrel{(i)}{\leq} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}^T A)_i \mathbf{x}_i = (\mathbf{y}^T A) \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (A \mathbf{x}) = \\ &= \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j (A_j \mathbf{x}) \stackrel{(ii)}{\leq} \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j \mathbf{b}_j = \mathbf{b}^T \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Pokud jsou přípustné, platí $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ a jsou tedy optimální. ■

6 Farkasovo lemma a dualita

Definice 6.1. (Varianty Farkasova lemmatu):

- $(\exists \mathbf{x} \geq 0)(A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}) \iff (\forall \mathbf{y} \geq 0)(\mathbf{y}^T A \geq 0 \implies \mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0)$
- $(\exists \mathbf{x})(A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}) \iff (\forall \mathbf{y} \geq 0)(\mathbf{y}^T A = 0 \implies \mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq 0)$

Definice 6.2. (Konvexní kužel): generovaný a_1, \dots, a_n se definuje

$$\text{cone}(a_1, \dots, a_n) = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n; t_1, \dots, t_n \geq 0\}.$$

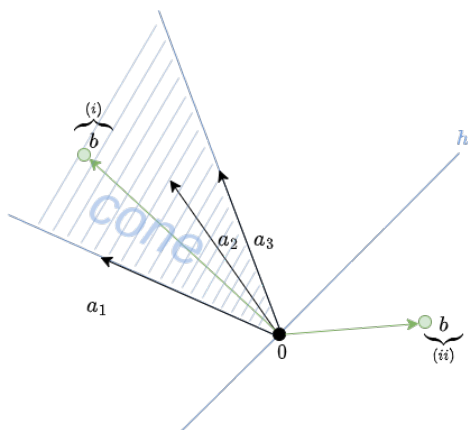
Tvrzení 6.1. (Farkasovo lemma (geometricky) a souvislost s větou o oddělování): Nastane právě jedna z následujících:

- (i) Bod $\mathbf{b} \in \text{cone}(a_1, \dots, a_n)$
- (ii) Existuje nadrovina h obsahující $0 \in \mathbb{R}^m$, t.j. $h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0\}$ pro nějaké $0 \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\text{cone}(a_1, \dots, a_n) \subseteq \{\mathbf{x}; \mathbf{y}^T \mathbf{x} \geq 0\}$ a zároveň $\mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0$.

Tvrzení 6.2. (Farkasovo lemma): Nastane právě jedna z následujících:

- (i) $\exists \mathbf{x} \geq 0, A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- (ii) $\exists \mathbf{y}, \mathbf{y}^T A \geq 0, \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0$.

Důkaz: ■



Farkasovo lemma plyne z Věty o oddělování.
Vyjádříme geometricky, vezmeme kužel a $\mathbf{b} \in \text{cone}(a^1, \dots, a^n)$, kde a^i značí i -tý sloupec A .

Tvrzení 6.3. Farkasovo lemma plyne ze silné věty o dualitě.

Důkaz: Mějme (P) $\max\{0^T \mathbf{x}; A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}\}$, (D) $\min\{\mathbf{b}^T \mathbf{y}; A^T \mathbf{y} = 0; \mathbf{y} \geq 0\}$.

Platí, že $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má řešení \iff (P) má přípustné řešení a je omezená \iff (D) má přípustné řešení a $0 = \max\{0^T \mathbf{x}; A\mathbf{y} \leq \mathbf{b}\} = \min\{\mathbf{b}^T \mathbf{y}; A^T \mathbf{y} = 0; \mathbf{y} \geq 0\}$. ■

7 Fourier-Motzkinova eliminace

Metoda, kde ze soustavy nerovnic s n proměnnými uděláme soustavu $n - 1$ proměnnými tak, že zachová řešitelnost. V podstatě Gaussova eliminace pro nerovnice.

Věta 7.1. (Fourier-Motzkinova eliminace): *Nechť $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ je systém s n proměnnými a m nerovnicemi. Pak existuje systém $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ s $(n-1)$ proměnnými a nejvýše $\max(m, \frac{m^2}{4})$ nerovnicemi splňující:*

(1) $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má řešení $\iff A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ má řešení,

(2) Každá nerovnice v $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ je nezáporná lineární kombinace nerovnic systému $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

Důkaz: Vynásobíme řádky kladnými čísly $\implies A$ splňuje $a_{i1} \in \{0, 1, -1\}$.

Dále definujeme $C = \{i, a_{i1} = 1\}$, $F = \{i, a_{i1} = -1\}$ a $L = \{i, a_{i1} = 0\}$.

Systém $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ splňuje:

(i) $a_j'^T \mathbf{x}' + a_k'^T \mathbf{x}' \leq \mathbf{b}_j + \mathbf{b}_k$ pro $\forall j \in C, k \in F$,

(ii) $a_l'^T \mathbf{x}' \leq \mathbf{b}_l$ pro $l \in L$.

Máme tedy (2) splněno. Stačí dokázat ekvivalenci v (1).

\Rightarrow Splněno.

\Leftarrow Nechť $\tilde{\mathbf{x}}' = (\tilde{\mathbf{x}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n)$ je řešení $A'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$. Chceme najít $\tilde{\mathbf{x}}_1'$, aby $A\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}$.

Z (i) vyplývá vztah $a_k'^T \mathbf{x}' - \mathbf{b}_k \leq \mathbf{b}_j - a_j'^T \mathbf{x}'$, pro $\forall j \in C, k \in F$. Z toho vyplývá, že:

$$\max_{k \in F} (a_k'^T \tilde{\mathbf{x}}' - \mathbf{b}_k) \leq \min_{j \in C} (\mathbf{b}_j - a_j'^T \tilde{\mathbf{x}}').$$

Zvolíme tedy $\tilde{\mathbf{x}}_1$ mezi těmito omezeními.

Takže $j \in C \implies \tilde{\mathbf{x}}_1 + a_j'^T \tilde{\mathbf{x}}' \leq \mathbf{b}'_j$, analogicky pro $k \in F \implies \tilde{\mathbf{x}}_1 + a_k'^T \tilde{\mathbf{x}}' \leq \mathbf{b}'_k$.

■

8 Věta o oddělování

Definice 8.1. (Konvexní množina): Množina X je *konvexní*, pokud je mezi každými dvěma body $x, y \in X$ mezi nimi úsečka, tj. $t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in X$.

Věta 8.1. (O oddělování): *Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné, uzavřené, konvexní a disjunktní a C je omezená. Pak existuje nadrovina $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, která silně odděluje C a D , tj. taková, že $C \subseteq \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} < b\}$ a $D \subseteq \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} > b\}$.*

Důkaz: (Náznak důkazu). Vezmeme dva nejbližší body. Pokud je jedna z množin nekonečná, vezmeme vhodné okolí. Pak vezmeme nadrovinu, která je kolmá na vektor bodů (rozdíl) a leží na půli cesty mezi body. Oba body leží na různých stranách, jiné body neleží blíž. ■

9 Minkowski-Weylova věta

Definice 9.1. (Diskrétní optimalizace): Nechť X je konečná, $\varphi \subseteq 2^X$ a $w : X \rightarrow \mathbb{Q}$. Najděte $\max_{A \in \varphi} w(A)$, kde $w(A) = \sum_{a \in A} w(a)$.

Definice 9.2. (Konvexní obal): množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ značíme $\text{conv}(X)$ a definujeme jako průnik všech konvexních množin obsahujících X , tedy:

$$\text{conv}(X) = \{C \mid C \text{ je konvexní a } X \subseteq C\}$$

Definice 9.3. (Afinní obal): množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech afinních prostorů L takových, že $X \subseteq L$.

Definice 9.4. (Afinní kombinace): bodů z X je libovolný bod daný výrazem $\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_k a_k$, pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$.

Věta 9.1. (Minkowski-Weyl): Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pak X je omezený konvexní mnohostěn \iff existuje $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že V je konečná a $X = \text{conv}(V)$.

Důkaz:

\Rightarrow Indukcí podle $\dim Q$. L je afinní obal $Q \rightsquigarrow \dim L = \dim Q$.

(i) $\dim Q \leq 0 \implies |Q| \leq 1 \implies V = Q$.

(ii) $\dim Q \geq 1 \implies L$ obsahuje přímku $\implies \dim L = d \geq 1$. Pro $i = \{1, \dots, m\}$, nechť:

$$Q = \{\mathbf{x} \mid a_i^T \mathbf{x} \leq b\}$$

$$P_i = \{\mathbf{x} \mid a_i^T \mathbf{x} \leq b_i\}$$

$$R_i = \{\mathbf{x} \mid a_i^T \mathbf{x} = b\}$$

$$M = \{i \mid Q \cap R_i \neq \emptyset\},$$

Jelikož $i \in M \implies \dim(Q \cap R_i) \leq d - 1$, protože $Q \subseteq L \cap R_i \subsetneq L \implies$ dle indukčního předpokladu, že $i \in M \implies Q \cap R_i = \text{conv}(V_i)$, kde $V = \bigcup_{i \in M} V_i$.

Ukážeme, že $Q = \text{conv}(V)$.

◦ $V_i \subseteq Q \implies V \subseteq Q \implies \text{conv}(V) \subseteq Q$.

◦ $\mathbf{x} \in Q$, p je přímkou, $p \subseteq L$, $\mathbf{x} \in p$. Víme, že p existuje, protože $\dim L \geq 1$.

Takže $\mathbf{x} \in p \cap Q = p \cap (\bigcap_{i \in M} P_i) = \bigcap_{i \in M} (p \cap P_i) \neq \emptyset$, takže $p \cap Q$ je úsečka s

koncovými body $\mathbf{y}, \mathbf{z} : \mathbf{y} \in R_i, \mathbf{z} \in R_j$, pro $i, j \in M$.

A tedy $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \text{conv}(V)$, \mathbf{x} leží na úsečkách $\mathbf{y}, \mathbf{z} \implies \mathbf{x} \in \text{conv}(V) \implies Q \subseteq \text{conv}(V)$.

\Leftarrow Nechť $V \in \mathbb{R}^n$ je konečná a $X = \text{conv}(V)$.

Dále nechť $H = \{\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a \in [-1, 1]^n, b \in [-1, 1], (\forall \mathbf{v} \in V)(a^T \mathbf{v} \leq b)\}$ je omezený mnohostěn. Podle " \Rightarrow " je $H = \text{conv}(W)$ pro nějaké konečné W .

Platí $Y := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \binom{a}{b} \in W)(a^T \mathbf{x} \leq b)\}$ a ukážeme, že $\text{conv}(V) = Y$.

◦ Dle definice $V \subseteq Y \implies \text{conv}(V) \subseteq Y$.

◦ Pro důkaz $Y \subseteq \text{conv}(V)$ nechť $\mathbf{x} \notin \text{conv}(V) \implies$ Věta o oddělování (8.1.) $\implies \exists a, b : a^T \mathbf{x} > b, (\forall \mathbf{v} \in V)(a^T \mathbf{v} < b) \implies \binom{a}{b} \in H \implies \mathbf{x}$ nesplňuje nerovnost z $H \implies \mathbf{x}$ nesplňuje nerovnost z $W \implies \mathbf{x} \notin Y$.

■

Důsledek 9.1. Každá úloha diskrétní optimalizace je úloha lineárního programování.

Důkaz: $P_\varphi = \text{conv}(\mathbf{x}_A \mid A \in \varphi) \subseteq \mathbb{R}^n$, kde \mathbf{x}_A je charakteristický vektor.

Z Minkowski-Weylovy věty (9.1.) víme, že P_φ je mnohostěn \implies jde řešit pomocí lineárního programu. ■

10 Racionální a celočíselné mnohostěny

Definice 10.1. (Celočíselný mnohostěn): P je celočíselný \iff má všechny vrcholy celočíselné.

Definice 10.2. (Racionální mnohostěn): P je racionální $\iff P = \{\mathbf{x}; A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ a všechny složky A i \mathbf{b} jsou racionální.

Věta 10.1. *Nechť P je racionální, potom všechny vrcholy P jsou racionální a jsou dosvědčeny racionální cílovou funkcí.*

Důkaz: Pro rovnicový tvar $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$.

Vrcholy P odpovídají bázeickým řešením

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \implies \exists B \in \{1, \dots, n\}, |B| = m,$$

že $A_B v_B = \mathbf{b}$, $v_N = 0$, $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$.

Tedy v_B je jediné řešení, a to $v_B = \mathbf{b} \cdot A_B^{-1} \implies v$ je racionální.

(Pro nestandardně popsaný P odpovídají vrcholy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$). ■

Věta 10.2. *Mnohostěn P je celočíselný \iff pro každý celočíselný \mathbf{w} platí, že $\max\{\mathbf{w}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in P\}$ je celé číslo.*

Důkaz:

$$\implies \max \mathbf{w}^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in P \text{ se nebývá ve vrcholu } \mathbf{z} \implies \max \mathbf{w}^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in P = \mathbf{w}^T \mathbf{z} \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftarrow \text{Nechť } \mathbf{z} \text{ je vrchol} \implies \mathbf{z} \text{ je optimum } \max \mathbf{w}^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in P, \text{ pro nějaké } \mathbf{w} \in \mathbb{Z}.$$

Vynásobíme \mathbf{w} velkým číslem, aby pro každý vrchol $\mathbf{u} \neq \mathbf{z}$: $\mathbf{w}^T \mathbf{z} > \mathbf{w}^T \mathbf{u} + \mathbf{u}_1 - \mathbf{z}_1$.

A tedy \mathbf{z} je jediné optimální řešení pro \mathbf{w} i pro $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1 + 1, \mathbf{w}_2, \dots) \implies \mathbf{w}^T \mathbf{z}, \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{z} \in \mathbb{Z} \implies \mathbf{z}_1 \in \mathbb{Z} \implies \mathbf{z}$ je celočíselné. ■

11 TU matice a Hoffman-Kruskalova věta

Definice 11.1. (Unimodulární matice): Matice A s lineárně nezávislými řádky je unimodulární, pokud je A celočíselná a pokud pro každou bázi B : $\det(A_B) \in \{-1, 1\}$.

Definice 11.2. (Totálně unimodulární matice): Matice A je totálně unimodulární, pokud každá čtvercová podmatice má $\det \in \{-1, 0, 1\}$.

Věta 11.1. *Nechť $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ je celočíselná s $\det A \neq 0$, pak pro každý celočíselný vektor \mathbf{b} platí, že*

$$A^{-1}\mathbf{b} \text{ je celočíselné} \iff \det A \in \{-1, 1\}.$$

Důkaz:

$$\Leftarrow \text{Cramerovo pravidlo} \implies A^{-1} \text{ je celočíselný.}$$

$$\begin{aligned} \implies A^{-1} \mathbf{e}_i \text{ je celočíselný} &\iff i\text{-tý sloupec } A^{-1} \text{ je celočíselný} \implies \\ &\implies A^{-1} \text{ je celočíselné, ale } \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \implies \det(A) \in \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

■

Věta 11.2. *Nechť A je celočíselná a má lineárně nezávislé řádky, potom $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = b, \mathbf{x} > 0\}$ je celočíselné pro každé $b \in \mathbb{Z} \iff A$ je unimodulární.*

Důkaz:

\Leftarrow Každý vrchol je bázecké řešení pro bázi $B \implies A_B \mathbf{z}_B = b, \mathbf{z}_{N \setminus B} = 0 \implies \mathbf{z}_B = A_B^{-1} b \implies$ je celočíselné (viz. Věta 11.1.) .

\Rightarrow Stačí dokázat, že $A_B^{-1} b$ je celočíselné pro každé $b \in \mathbb{Z}$ a bázi B .

Nechť $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}$ splňuje $\mathbf{y} + A_B^{-1} b \geq 0$ a nechť $\bar{b} = A_B(\mathbf{y} + A_B^{-1} b)$, kde \bar{b} je celočíselný.

Definujme $\mathbf{z}_B = \mathbf{y} + A_B^{-1} b, \mathbf{z}_{N \setminus B} = 0 \implies \mathbf{z}$ je bázecké řešení ($A\mathbf{x} = \bar{b}, \mathbf{x} \geq 0$) $\implies \mathbf{z}$ je vrchol $\implies \mathbf{z} \in \mathbb{Z} \implies \mathbf{z}_B = \mathbf{y} + A_B^{-1} b$ je celočíselný $\implies A_B^{-1} b$ je celočíselný. ■

Věta 11.3. (Hoffman-Kruskal): *Nechť $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq b, \mathbf{x} \geq 0\}$ je celočíselný pro každé $b \in \mathbb{Z} \iff$ každá čtvercová podmatice A má $\det A \in \{-1, 0, 1\}$.*

Důkaz: Dodáme pomocné proměnné a převedeme na standardní tvar. Tedy P převedeme na ST.

P je celočíselný $\iff \max(w^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in P)$ je celé číslo $\forall w \in \mathbb{Z}^n$
 $\iff P' = \{\mathbf{z} \mid [A|I]\mathbf{z} = b, \mathbf{z} \geq 0\}$ je celočíselný $\forall b \in \mathbb{Z}$
 $\iff [A|I]$ je unimodulární (viz. věta 11.2.)
 \iff každá báze má $\det = 1$, nebo $\det = -1$
 $\iff A$ je totálně unimodulární. ■

12 Chvátalovy řezy

Definice 12.1. (Gomory-Chvátalův řez): Pro $A\mathbf{x} \leq b, A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, \mathbf{y} \geq 0, c = \mathbf{y}^T A, d = \mathbf{y}^T b$. Pokud c je celočíselné, potom podmínka $c^T \mathbf{x} \leq \lfloor d \rfloor$ se nazývá řez.

Definice 12.2. (Chvátalův uzávěr): $P' = \{\mathbf{x} \in P \mid \mathbf{x}$ splňuje každý řez $\}$.

Věta 12.1. (O Chvátalově řezu): *Nechť $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq b\}$ je racionální mnohostěn, $w^T \mathbf{x} \leq t, w \in \mathbb{Z}^n$ je splněno pro $\forall \mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^n$. Potom existuje důkaz $w^T \mathbf{x} \leq t',$ pro $t' \leq t$.*

Věta 12.2. (O Chvátalově řezu): $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset \implies$ existuje odvození " $0^T \mathbf{x} \leq -1$ ".

Pozorování 12.1. $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq b\}$ je racionální mnohostěn, P_I je konvexní obal celočíselných bodů P a $P' = \{\mathbf{x} \in P \mid \mathbf{x}$ splňuje každý řez $\}$.

Věta 12.3. *Chvátalův uzávěr je racionální mnohostěn.*

Důkaz: Mějme $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq b\}$ a předpokládejme, že $A, b \in \mathbb{Z}$.

* $\left\{ \begin{array}{l} P' \text{ je definované podmínkami } A\mathbf{x} \leq b \text{ a nerovnicemi } (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} \leq \lfloor \mathbf{y}^T b \rfloor, 0 \leq \mathbf{y} \leq 1. \\ (\text{protože podmínek je konečně mnoho, tak } P' \text{ je racionální mnohostěn}) \end{array} \right.$

Nechť $w^T \mathbf{x} \leq \lfloor t \rfloor$ je řez odvozený z $A\mathbf{x} \leq b$ vektorem \mathbf{y} a nechť

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \lfloor \mathbf{y} \rfloor \implies w' = (\mathbf{y}')^T A = w - (\lfloor \mathbf{y} \rfloor)^T A$$

je celočíselné.

Jelikož $t' = (\mathbf{y}')^T b = t - (\lfloor \mathbf{y} \rfloor)^T b$ se liší o celé číslo od t , tak řez $(w')^T \mathbf{x} \leq \lfloor t' \rfloor$ odvozený vektor \mathbf{y}' je podmínka z * a společně s platnou nerovností

$$((\lfloor \mathbf{y} \rfloor)^T A)\mathbf{x} \leq (\lfloor \mathbf{y} \rfloor)^T b,$$

se sečte na podmínku $w^T \mathbf{x} \leq \lfloor t \rfloor \implies * \implies P'$ je racionální mnohostěn. ■

13 Primární dualní algoritmy

Definice 13.1. (*T-join*) $G = (V, E)$ je graf, $T \subseteq V$, $|V|$ je sudá, $E' \subseteq E$ je *T-join*, jestli pro graf $H = (V, E')$ platí, že $\deg_H(v)$ je lichý $\iff v \in T$.

Definice 13.2. (*P-D algoritmus*) Algoritmus založený na podmínkách komplementarity. Pokud \mathbf{x} je přípustné řešení (P) a \mathbf{y} pro (D), pak

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ jsou optimální} \iff (\forall u, v \in E)(\mathbf{x}_{u,v} > 0 \implies \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_v = c_{u,v}).$$

Příklad 13.1. (*Minimální perfektní párování*)

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min \sum c_e \mathbf{x}_e \\ & \forall v \in V : \sum_{e \in \delta(v)} \mathbf{x}_e = 1 \\ & \mathbf{x}_e \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(D)} & \max \sum \mathbf{y}_v \\ & \forall u, v \in E : \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_v \leq c_{u,v} \end{array}$$

Postupně upravujeme (M, \mathbf{y}) , kde M je párování v G a \mathbf{y} je přípustné řešení (D).

Začátek: $M \neq \emptyset$, $\mathbf{y} = 0$

Konec: Pokud M je perfektní $\implies (M, \mathbf{y})$ je optimum (P). To vychází z podmínek komplementarity.

Je to podobné jako kytičkový algoritmus.

Zdroje

Čerpal jsem z vlastních poznámek z hodin plus:

- [skripta](#) prof. Jiřího Sgalla
- [zápisky](#) z přednášek od Štěpána Vodsedálka
- "skripta" (ručně psaná) přednášejícího prof. Martina Loebla