Zpracování otázek ke zkoušce z Matematické analýzy III

Karel Velička

23. května 2024

2. ročník bc. informatika
doc. RNDr. Martin Klazar, Dr.

Obsah

1 Metrické prostory, Sférická metrika, Plochost hemisféry

Definice 1.1. *Metrický prostor* je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení $d : M \times M \to \mathbb{R}$ zvaného *metrika* či *vzdálenost*, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ ... symetrie,

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ... trojúhelníková nerovnost.

Definice 1.2. *Izometrie* f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \to N$, jež zachovává vzdálenosti: $\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$.

Definice 1.3. *(Sférická metrika):* Nechť $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1\}$ je jednotková sféra v Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Potom funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $x, y \in S$ jako

$$s(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 & \dots\ \bar{x} = \bar{y}, \\ \varphi & \dots\ \bar{x} \neq \bar{y}, \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma přímkami procházejícími počátkem $\bar{0} := (0, 0, 0)$ a body $\bar{x}$ a $\bar{y}$.
Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\bar{x}$ a $\bar{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\bar{x}$ a $\bar{y}$. Funkci s nazveme *sférickou metrikou.*

Definice 1.4. *Horní hemisféra H* je množina $H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subseteq S$.

Věta. *(H není plochá): Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému pr. (X, e_n) s $X \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Důkaz: Následující vlastnost vzdáleností daných čtyřmi body t, u, v a w v Euklidovském prostoru $(\mathbb{R}^n, e_n)$ není splněna v (H, s):

$$\begin{aligned} &e_n(t, u) = e_n(t, v) = e_n(u, v) > 0 \ \wedge \\ &e_n(t, w) = e_n(w, u) = \frac{1}{2} e_n(t, u) \implies e_n(w, v) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} e_n(t, v)}_{< e_n(t,v)}. \end{aligned}$$

Podle předpokladu implikace body t, u a v tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky $x > 0$ a w má od t i od u vzdálenost $\frac{x}{2}$.
Podle tvrzení *(Když $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ jsou různé body v Euklidovském prostoru se vzdálenostmi $e_n(c, a) = e_n(c, b) = \frac{1}{2} e_n(a, b)$, pak c je střed úsečky ab.)* je pak w středem úsečky tu. Tyto čtyři body jsou tedy *koplanární* (všechny leží v jedné rovině) a úsečka vw je výška spuštěná z vrcholu v rovnostranného trojúhelníka tuv na stranu tu.
Podle Pythagorovy věty se její délka $e_2(v, w) = e_n(v, w)$ rovná $\frac{\sqrt{3}}{2} x$, což říká závěr implikace.
Na hemisféře (H, s) nalezneme čtyři různé body t, u, v a w splňující předpoklad předchozí implikace, ale ne její závěr. Z toho plyne, že izometrie mezi hemisférou a Euklidovským prostorem neexistuje, protože každá izometrie ze své definice implikaci zachovává. Tyto body jsou:

$$t = (1, 0, 0), \quad u = (0, 1, 0), \quad v = (0, 0, 1), \quad w \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Patrně $s(t, u) = s(t, v) = s(u, v) = \frac{\pi}{2}$ a $s(t, w) = s(w, u) = \frac{1}{2} s(t, u) = \frac{\pi}{4}$.
Bod v je *"severní pól"* $(x_3 = 1)$, t, u a w leží na *"rovníku"* $(x_3 = 0)$ a w je střed oblouku tu.
Ale všechny body na rovníku mají od pólu v stejnou vzdálenost $\frac{\pi}{2}$. Takže $s(w, v) = s(t, v)$ a závěr implikace neplatí. ■

2 Ostrowskiho věta

Definice 2.1. *p-adický řád* čísla n je $\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{p^m \mid n;\ m \in \mathbb{N}_0\})$.
(Platí zde vztah pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$.)
(Dále platí aditivita, tedy pro $\alpha = \frac{a}{b}$ a $\beta = \frac{c}{d}$ platí $\mathrm{ord}_p(a, b) = \mathrm{ord}_p(\alpha) + \mathrm{ord}_p(\beta)$.)

Definice 2.2. *Triviální norma* na libovolném tělese F je funkce $|| \cdot ||$ s $||0_F|| = 0$ a $||x|| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Definice 2.3. *(p-adická norma):* Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo $p \in \mathbb{N}$. Potom *kanonickou p-adickou normu* $|| \cdot ||_p$ definujeme vztahem $||\alpha||_p := (p)^{\mathrm{ord}_p(\alpha)}$.

Věta. *Nechť $||\cdot||$ je norma na tělese $\mathbb{Q}$. Pak nastává právě jedna ze tří následujících možností.*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné $c \in (0,1]$, že $||x|| = |x|^c$.*
3. *Existuje reálné $c \in (0,1)$ a prvočíslo p, že $||x|| = |x|_p = c^{ord_p(x)}$ (kde $c^\infty := 0$).*

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy nad $\mathbb{Q}$.

Důkaz: Nechť $||\cdot||$ je netriviální, tedy není tvaru *případu* 1.
Pak existuje přirozené $n \geq 2$, že $||n|| \neq 1$. Máme tedy dva případy:

- Existuje $n \in \mathbb{N}$, že $||n|| > 1$. Jako n_0 označíme nejmenší takové n. Patrně $n_0 \geq 2$ a

$$1 \leq m < n_0 \implies ||m|| \leq 1. \tag{1}$$

Existuje jednoznačné reálné číslo $c > 0$, že

$$||n_0|| = n_0^c. \tag{2}$$

Každé $n \in \mathbb{N}$ lze při základu n_0 pro a_i; $s \in \mathbb{N}_0$; $0 \leq a_i < n_0$ a $a_s \neq 0$, zapsat jako:

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \ldots + a_s n_0^s.$$

Pro $n_0 = 10$ jde o obvyklý zápis v desítkové soustavě. Takže:

$$\begin{aligned}
||n|| &= \left|\left|a_0 + a_0 n_0 + a_2 n_0^2 + \ldots + a_s n_0^s\right|\right| \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{j=0}^{s} ||a_j|| \cdot ||n_0||^j \overset{(_*)}{\leq} \sum_{j=0}^{s} n_0^{js} \\
&= 1 + n_0^c + n_0^{2c} + \ldots + n_0^{sc} \\
&= n_0^{sc}(1 + n_0^{-c} + n_0^{-2c} + \ldots + n_0^{-sc}) \\
&\leq n_0^{sc} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i \overset{n_0^s \leq n}{\leq} n^c C \quad , \qquad \text{kde } C = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i
\end{aligned}$$

Pro doplnění: $(*)$ Δ-nerovost a multipl. $||.||$, $(_*)$ vychází z (1) a (2)

Tedy platí nerovnost *(ve skutečnosti platí i s $C = 1$)*:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : ||n|| \leq C n^c. \tag{3}$$

Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ nám multiplikativita normy a nerovnost (3) dávají:

$$||n||^m = ||n^m|| \leq C(n^m)^c = C(n^c)^m.$$

Vezmeme-li zde m-tou odmocninu, dostaneme $||n|| \leq C^{1/m} n^c$. Pro $m \to \infty$ máme $C^{1/m} \to 1$. Takže:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : ||n|| \leq n^c. \tag{4}$$

Nyní podobně odvodíme opačnou nerovnost $||n|| \geq n^c$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ hořejší zápis čísla n při základu n_0 dává $n_0^{s+1} > n \geq n_0^s$. Podle Δ-nerovnosti máme:

$$||n_0||^{s+1} = \left|\left|n_0^{s+1}\right|\right| \geq ||n|| + \left|\left|n_0^{s+1} - n\right|\right|.$$

Tedy:

$$\begin{aligned}
||n|| \quad &\geq ||n_0||^{s+1} - \left|\left|n_0^{s+1} - n\right|\right| \\
&\overset{(2),(4)}{\geq} n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n)^c \\
&\overset{n \geq n_0^s}{\geq} n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^c \\
&= n_0^{(s+1)c} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c\right) \\
&\overset{n_0^{s+1} > n}{\geq} n^c C' \quad , \qquad \text{kde } C' = 1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c > 0.
\end{aligned}$$

Trik s m-tou odmocninou opět dává $\forall n \in \mathbb{N}_0 : ||n|| \geq n^c$ a tedy už platí $\forall n \in \mathbb{N}_0 : ||n|| = n^c$.
Z multiplikativity normy dostáváme $||x|| = |x|^c$ pro každý zlomek $x \in \mathbb{Q}$. A jelikož pro $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je $c \in (0,1]$, tak dostáváme, že platí *případ 2* Ostrowskiho věty.

- Pro každé $n \in \mathbb{N} : ||n|| \leq 1$ a existuje $n \in \mathbb{N} : ||n|| < 1$.

  Nechť n_0 je nejmenší takové n, opět $n_0 \geq 2$. Tvrdíme, že $n_0 = p$ je prvočíslo. Kdyby totiž n_0 mělo rozklad $n_0 = n_1 n_2$ s $n_i \in \mathbb{Z}$ a $1 < n_1, n_2 < n_0$, dostali bychom spor:

$$1 > ||n_0|| = ||n_1 n_2|| = ||n_1|| \cdot ||n_2|| = 1 \cdot 1 = 1.$$

  Použili jsme zde multiplikativitu normy a to, že $||m|| = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ s $1 \leq m < n_0$.

  Ukážeme, že každé jiné prvočíslo $q \neq p$ má normu $||q|| = 1$. Pro spor nechť $q \neq p$ je další prvočíslo s normou $||q|| < 1$. Vezmeme tak velké $m \in \mathbb{N}$, že $||p||^m, ||q||^m < \frac{1}{2}$.

  Z elementární teorie čísel víme, že existují Bézoutovy koeficienty, tedy celá ´čísla a a b, že $aq^m + bp^m = 1$. Znormování této rovnosti dává spor:

$$1 = ||1|| = ||aq^m + bp^m|| \leq ||a|| \cdot ||q||^m + ||b|| \cdot ||p||^m < 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

  Zde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost, multiplikativitu normy a to, že nyní $||a|| \leq 1$ pro každé $a \in \mathbb{Z}$.

  Tedy $||q|| = 1$ pro každé prvočíslo $q \neq p$. Odtud pomocí multiplikativity normy a rozkladu nenulového zlomku x na součin mocnin prvočísel dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} ||x|| &= \left|\left| \prod_{q=2,3,5,\ldots} q^{\mathrm{ord}_q(x)} \right|\right| = \prod_{q=2,3,5,\ldots} ||q||^{\mathrm{ord}_q(x)} = ||p||^{\mathrm{ord}_p(x)} \\ &= c^{\mathrm{ord}_p(x)} \quad , \qquad \text{kde } c := ||p|| \in (0,1). \end{aligned}$$

  Také $||0|| = c^{\mathrm{ord}_p(0)} = c^\infty = 0$. Dostali jsme tak *případ 3* Ostrowskiho věty.

■

3 Heine–Borelova věta

Definice 3.1. *(Homeomorfismus):* Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je jejich *homeomorfismus*, pokud f je bijekce a pokud f a f^{-1} jsou spojitá zobrazení.

Definice 3.2. *(Topologická kompaktnost):* Podmnožina $A \subseteq M$ metrického prostoru (M, d) je *topologicky kompaktní*, pokud pro každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I := [0, 2\pi)\} \in M$ platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \implies \textit{existuje konečná množina } J \subset I : \bigcup_{i \in J} X_i \supset A.$$

Věta. *Podmnožina $A \subseteq M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní $\iff$ je topologicky kompaktní.*

Důkaz: BÚNO můžeme vzít $A = M$.

$\Rightarrow$ Nechť (M, d) je kompaktní metrický prostor a nechť $M = \bigcup_{i \in I} X_i$ je jeho otevřené pokrytí, takže každá množina X_i je otevřená. Nalezneme jeho konečné podpokrytí. Nejprve dokážeme, že

$$\forall \delta > 0 \textit{ existuje konečná množina } S_\delta \subset M : \bigcup_{a \in S_\delta} B(a, \delta) = M.$$

Kdyby ne, pak by existovalo $\delta_0 > 0$ a $(a_n) \subset M$, že $m < n \implies d(a_m, a_n) \geq \delta_0$ *(tato posloupnost nemá konvergentní podposloupnost, což je ve sporu s předpokládanou kompaktností množiny M).*

Kdyby existovalo $\delta_0 > 0$, že pro každou konečnou množinu $S \subset M$ je

$$M \setminus \bigcup_{a \in S} B(a, \delta_0) \neq \emptyset,$$

pak *(pokud již máme definované body $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s $d(a_i, a_j) \geq \delta_0$ pro každé $1 \leq i < j \leq n$)* vezmeme

$$a_{n+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta_0)$$

a a_{n+1} má od každého bodu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vzdálenost alespoň δ_0. Tak definujeme celou posloupnost (a_n).

Pro spor nyní předpokládejme, že hořejší otevřené pokrytí množiny M množinami X_i nemá konečné podpokrytí. Tvrdíme, že odtud vyplývá, že

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists b_n \in S_{1/n})(\forall i \in I): \ B\left(b_n, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq X_i.$$

Kdyby to tak nebylo *(negujeme předchozí tvrzení)*, pak by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $b \in S_{1/n_0}$ existuje $i_b \in I$, že $B(b, 1/n_0) \subset X_{i_b}$. Pak ale, protože $M = \bigcup_{b \in S_{1/n_0}} B(b, 1/n_0)$, dávají indexy $J = \{i_b \mid b \in S_{1/n_0}\} \subset I$ (ve sporu s předpokladem) konečné podpokrytí množiny M .

Výše uvedené tvrzení o n a b_n tak platí a lze vzít posloupnost $(b_n) \subset M$.

Podle předpokladu má konvergentní podposloupnost (b_{k_n}) s $b := \lim b_{k_n} \in M$. Protože X_i pokrývají M, existuje $j \in I$, že $b \in X_j$. Díky otevřenosti X_j existuje $r > 0$, že $B(b, r) \subset X_j$.

Vezmeme tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{k_n} < \frac{r}{2}$ a $d(b, b_{k_n}) < \frac{r}{2}$. Pro každé $x \in B(b_{k_n}, 1/k_n)$ pak podle trojúhelníkové nerovnosti máme, že:

$$d(x, b) \leq d(x, b_{k_n}) + d(b_{k_n}, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Z toho vyplývá, že:

$$B(b_{k_n}, 1/k_n) \subset B(b, r) \subset X_j.$$

To je ovšem ve sporu s vlastností bodů b_n. Tedy pokrytí M množinami X_i, $i \in I$, má konečné podpokrytí.

$\Leftarrow$ Předpokládáme, že každé otevřené pokrytí množiny M má konečné podpokrytí a odvodíme z toho, že každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost. Nejprve ukážeme, že předpoklad, že množina

$$(\forall b \in M)(\exists r_b > 0): \ M_b := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r_b)\}$$

je konečná, vede ke sporu.

Z pokrytí $M = \bigcup_{b \in M} B(b, r_b)$ totiž můžeme vybrat konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$. Dále si můžeme všimnout, že $\exists n_0, n \geq n_0 \implies a_n \notin \bigcup_{b \in N} B(b, r_b)$, protože množina indexů $\bigcup_{b \in N} M_b$ je konečná *(respektive je to konečné sjednocení konečných množin)*. To nám ovšem dává spor, protože $\bigcup_{b \in N} B(b, r_b) = M$ a platí tak, že je M_b nekonečná.

Nyní z (a_n) vybereme konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) s limitou b.

Nechť už jsme definovali indexy $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ takové, že $d(b, a_{k_i}) < \frac{1}{i}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Množina indexů $M_{1/(n+1)}$ je nekonečná, takže můžeme zvolit takové $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, že $k_{n+1} > k_n$ a $k_{n+1} \in M_{1/(n+1)}$.

Pak i $d(b, a_{k_{n+1}}) < \frac{1}{n+1}$. Takto je definována podposloupnost (a_{k_n}) konvergující k b.

■

4 Existence n-tých odmocnin v komplexních číslech

Věta. *(souvislost a spojitost). Nechť $f : X \to N$ je spojité zobrazení ze souvislé množiny $X \subseteq M$ v metrickém prostoru (M, d) do prostoru (N, e). Potom $f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq N$ je souvislá množina.*

Věta. *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*

$$(\forall u \in \mathbb{C})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists v \in \mathbb{C}) \quad v^n = u.$$

Důkaz: Předpokládejme, že $u \in S$ a že $n \in \mathbb{N}$ je liché. Potřebujeme dokázat, že zobrazení

$$f(z) = z^n : S \to S, \ \textit{kde } S \textit{ je komplexní jednotková kružnice,}$$

které je zřejmě spojité, je *na*.

Pro spor předpokládejme, že $\exists w \in S \setminus f[S]$. Tedy číslo w, které nemá n-tou odmocninu.

Vzhledem k lichosti n platí, že $w \in S \setminus f[S]$. To vychází z lichosti funkcí, tedy $f(-z) = -f(z)$.

Skrz body w a $-w$ vedeme přímku $\ell \subseteq \mathbb{C}$ a dostaneme tak rozklad:

$$C = A \cup \ell \cup B,$$

kde A a B jsou otevřené poloroviny určené přímkou ℓ.

Protože víme, že *pro každou přímku $\ell \subseteq \mathbb{C}$ je $\mathbb{C} \setminus \ell$ sjednocení dvou disjunktních otevřených množin*, tak jsou A, B disjunktní otevřené množiny. Zároveň víme, že platí:

$$(A \cup B) \cap S = S \setminus \{w, -w\} \quad \rightsquigarrow \quad \{1, -1\} \subseteq f[S] \cap (A \cup B) \quad \rightsquigarrow \quad |A \cap \{1, -1\}| = 1.$$

Množiny A a B tedy trhají množinu $f[S]$ a ta je nesouvislá. To je ale ve sporu s *větou o souvislosti a spojitosti*, protože $f[S]$ je obraz souvislé množiny S spojitou funkcí f a musí tedy být souvislá. ■

5 Baierova věta

Definice 5.1. *Cauchyova posloupnost* (a_n) splňuje, že

$$\forall \varepsilon,\ \exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Definice 5.2. *(Řídkost).* Množina $X \subseteq M$ v metrickém prostoru (M, d) je řídká, pokud:

$$(\forall a \in M)(\forall r > 0)(\exists b \in M)(\exists s > 0) : B(b, s) \subseteq B(a, r) \wedge B(b, s) \cap X = \emptyset.$$

Věta. *Nechť* (M, d) *je úplný metrický prostor a* $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$*. Pak nějaká množina* X_n *není řídká.*

Důkaz: Pro spor předpokládáme, že všechny množiny X_n jsou řídké. Cílem je sestrojit posloupnost $(\overline{B_n})$ do sebe vnořených uzavřených koulí, jejichž středy konvergují k bodu $a \in M$ ležícímu mimo všechny X_n, což dá ve výsledku pochopitelně spor.

Nechť $B(b, 1) \subseteq M$ je libovolná koule. Protože X_1 je řídká množina, tak existuje $a_1 \in M$ a $s_1 > 0$ takové, že $B(a_1, s_1) \subseteq B(b, 1)$ a $B(a_1, s_1) \cap X_1 = \emptyset$. Položíme:

$$\overline{B}(a_1, r_1) := \overline{B}\left(a_1, \min\left(\frac{s_1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Pak $\overline{B}(a_1, r_1) \subseteq B(a_1, s_1)$, tedy $\overline{B}(a_1, r_1) \cap X_1 = \emptyset$, a $r_1 \leq 1/2$. Nechť jsou už definované takové uzavřené koule

$$\overline{B}(a_1, r_1) \supseteq \overline{B}(a_2, r_2) \supseteq \ldots \supseteq \overline{B}(a_n, r_n),$$

že pro $i = 1, 2, \ldots, n$ je $\overline{B}(a_i, r_i) \cap X_i = \emptyset$ a $r_i \leq 2^{-i}$.
Protože X_{n+1} je řídká množina, existuje $a_{n+1} \in M$ a $s_{n+1} > 0$, že $B(a_{n+1}, s_{n+1}) \subseteq B(a_n, r_n)$ a $B(a_{n+1}, s_{n+1}) \cap X_{n+1} = \emptyset$. Položíme

$$\overline{B}(a_{n+1}, r_{n+1}) := B\left(a_{n+1}, \min\left(\frac{s_{n+1}}{2}, 2^{-n-1}\right)\right).$$

Pak

$$\overline{B}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{B}(a_n, r_n) \cap B(a_{n+1}, s_{n+1}),$$

tedy i $\overline{B}(a_{n+1}, r_{n+1}) \cap X_{n+1} = \emptyset$, a $r_{n+1} \leq 2^{-n-1}$.
Posloupnost $(a_n) \subseteq M$ středů výše definovaných uzavřených kouli je Cauchyova, protože

$$m \geq n \implies \overline{B}(a_m, r_m) \subseteq \overline{B}(a_n, r_n) \text{ a tedy } d(a_m, a_n) \leq r_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Nyní použijeme úplnost metrického prostoru (M, d) a vezmeme limitu $a := \lim a_n \in M$.
Protože $m \geq n \implies a_m \in \overline{B}(a_n, r_n)$ a protože každá $\overline{B}(a_n, r_n)$ je uzavřená množina, tak leží limita a v každé uzavřené kouli $\overline{B}(a_n, r_n)$ a tedy v žádné z množin X_n, což je spor. ∎

6 Basilejský problém

Tento problém byl pojmenován po švýcarském městě Basilej, kde působil matematik Johann Bernoulli a jeho bratr Jakob Bernoulli, kteří se tímto problémem zabývali.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Řešení tohoto problému nalezl švýcarský matematik Leonhard Euler v roce 1734.

Definice 6.1. *Řada* $\sum a_n$ je posloupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, které je přiřazena posloupnost částečných součtů

$$(s_n) := (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \subseteq \mathbb{R}$$

Tedy platí $\sum a_n := lim(s_n)$

Definice 6.2. Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její:

$$\textit{kosinové Fourierovy koeficienty}: \qquad a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$\textit{sinové Fourierovy koeficienty}: \qquad a_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Definice 6.3. *Fourierova řada funkce* $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right),$$

kde a_n a b_n jsou, po řadě, její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty.

Důsledek 6.1. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* 2π*-periodická a spojitá funkce, jejíž zúžení na interval* $[-\pi, \pi]$ *je hladké. Potom pro každé* $a \in \mathbb{R}$ *je* $F_f(a) = f(a)$*. Spojitá a hladká funkce se tedy rovná součtu své Fourierovy řady.*

Věta. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Důkaz: Spočítáme Fourierovu řadu funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ definovanou $f(x) = x^2$. Pak je f 2π-periodicky rozšířená na celé $\mathbb{R}$ *(což je možné díky tomu, že* $(-\pi)^2 = \pi^2$ *).*
Její sinové Fourierovy koeficienty jsou nulové a první (respektive nultý) kosinový Fourierův koeficient je roven

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Další, pro $\forall n \in \mathbb{N}$, jsou:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \overbrace{\cos(nx)}^{(\sin(nx)/n)'} dx \\
&= \frac{2}{\pi n} \underbrace{[x^2 \sin(nx)]_0^{\pi}}_{0-0=0} - \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \underbrace{\sin(nx)}_{(-\cos(nx)/n)'} dx \\
&= \frac{4}{\pi n^2} \underbrace{[x \cos(nx)]_0^{\pi}}_{\pi(-1)^n} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \underbrace{\cos(nx)}_{\sin \rightsquigarrow 0} dx \\
&= (-1)^n \frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Protože funkce f je spojitá a na $[-\pi, \pi]$ hladká, podle *Důsledku 6.1.* Dirichletovy věty pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$f(a) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(na) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(na)}{n^2}.$$

Pro $a = \pi$, dostaneme:

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

A tedy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$ ∎

7 Úplnost spojitého metrického prostoru

Věta. *Nechť $C(I)$ je množina všech spojitých funkcí z $I = [0,1] \to \mathbb{R}$. Potom metrický prostor $(C(I), ||f-g||_\infty)$, kde $I = [0,1]$ je úplný.*

Důkaz: Nechť $(f_n) \subset C(I)$ je Cauchyovská posloupnost v tomto metrickém prostoru, tedy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m)(n, n' \geq m \implies ||f_n - f_{n'}||_\infty < \varepsilon).$$

Potom pro každé $x \in I$ posloupnost $(f_n(x)) \subseteq \mathbb{R}$ je Cauchyovská, tedy konverguje a můžeme tak definovat limitu

$$f(x) = \lim f_n(x).$$

Nyní dokážeme, že je uniformě konvergentní, tedy, že $||f - f_n||_\infty \to 0$.
Nechť $x \in I$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme m (je nezávislé na x) takové, že výše zmíněná Cauchyova podmínka je splněna s $\frac{\varepsilon}{2}$. Dále tedy vezměme $k \geq m$ t.ž. $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Tedy

$$n \geq m \implies |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

a tedy $\lim f_n = f$ v tomto metrickém prostoru.

Už nám zbývá dokázat jen že f je spojitá (tedy, že je prvkem tohoto metrického prostoru).
Nechť $x_0 \in I$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme n_0 takové, že

$$n \geq n_0 \implies ||f - f_n||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále si vezme $\delta > 0$ takové, že:

$$x \in U(x_0, \delta) \cap I \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Využili jsme zde spojitosti f_{n_0} v bodě x_0. Potom $\forall x \in U(x_0, \delta) \cap I$, platí:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dostáváme tak tedy, že f je spojitá v bodě x_0. ■

8 Pólyova věta pro $d = 2$

Definice 8.1. *(náhodná procházka) Procházka* w v grafu $G = (V, E)$ je taková konečná $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ s délkou $|w| := n \in \mathbb{N}_0$, či nekonečná $w = (v_0, v_1, \ldots)$, posloupnost vrcholů $v_i \in V$, že pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ je $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Věta. *(Slabá Abelova). Když mocninná řada $U(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$ konverguje pro každé $x \in [0, R)$, kde $R \in (0, +\infty)$ je reálné číslo, a má všechny koeficienty $u_n \geq 0$, pak následující limita a suma jsou definované a rovnají se, a to bez ohledu na konečnost/nekonečnost. Tedy*

$$\lim_{x \to R^-} U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n \quad (=: U(R)).$$

Důkaz: Pro každé $N \in \mathbb{N}$ je:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} u_n R^n &= \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{N} u_n x^n \\ \leq \lim_{x \to R^-} U(x) &= \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n, \end{aligned}$$

kde všechny limity a nekonečné součty jsou definované *(s možnou hodnotou $+\infty$)* díky monotonii a nezápornosti.
Úvodní rovnost plyne z faktu, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ se $\lim_{x \to R^-} x^n = R^n$.
Dvě následující nerovnosti plynou z nezápornosti koeficientů u_n. Limitní přechod $N \to +\infty$ dává větu. ■

Věta. *Pro $d = 1$ a $d = 2$ je* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} = 1$ *a pro $d \geq 3$ je limita < 1.*
(neboli pro $d \leq 2$ pro velké n náhodná procházka délky n skoro jistě opětovně navštíví start, ale pro $d \geq 3$ ho s pravděpodobností > 0 opětovně nenavštíví.)

Důkaz: Nechť $d = 2$ a $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ je procházka v grafu $\mathbb{Z}^2$ s délkou $n \in \mathbb{N}_0$.
Nechť $\underline{b_n}$ je počet procházek w s $v_n = v_0 = \bar{0}$ a $\underline{c_n}$ je počet procházek w s $v_n = v_0 = \bar{0}$, ale $v_j \neq \bar{0}$ pro j s $0 < j < n$.
Díky tranzitivitě grafu $\mathbb{Z}^2$ tyto počty nezávisí na startu procházky. Položíme $c_0 := 0$. Je jasné, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $a_n \leq d_n, c_n \leq b_n \leq d_n$ a $d_n = 4^n$. Procházky počítané a_n rozdělíme do skupin podle jejich prvního návratu do $\bar{0}$ ve vrcholu v_j . Pomocí vztahů $d_n = 4^n$ a $a_n \leq 4^n$ dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ rovnice:

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} c_j d_{n-j} \quad \text{, takže} \quad \frac{a_n}{4^n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j}{4^j} \leq 1.$$

Tedy stačí dokázat, že:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{4^j} = 1.$$

Druhý vztah, který použijeme, je mezi mocninnými řadami:

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{4^n} x^n = 1 + \ldots \quad \text{a} \quad C(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{4^n} x^n = \frac{x^2}{4} + \ldots,$$

tedy

$$B(x) = \frac{1}{1 - C(x)} = \sum_{k\geq 0} C(x)^k.$$

Snadno se to nahlédne formálně, tedy jako vztah mezi formálními mocninnými řadami, rozdělením procházky počítané b_n jejími $k+1$ návraty do $\bar{0}$ na k úseků s délkami $j_1, j_2, \ldots, j_k$ splňujícími $j_1 + \ldots + j_k = n$.
Ty jsou počítány čísly $c_{j_1}, \ldots, c_{j_k}$. Ale tento vztah také platí na úrovni reálných funkcí $B(x)$ a $C(x)$ pro $x \in [0, 1)$, protože obě mocninné řady mají poloměry konvergence ≥ 1 *(neboť b_n, $c_n \leq 4^n$).*
Nyní stačí dokázat, že

$$\lim_{x\to 1^-} B(x) = +\infty.$$

Vztah výše implikuje, že $\lim_{x\to 1^-} C(x) = 1$ a to podle *Abelovy věty* dává, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{4^j} =: C(1) = \lim_{x\to 1^-} C(x) = 1.$$

To je přesně požadovaný součet nekonečné řady.
Abychom dokázali, že $\lim_{x\to 1^-} B(x) = +\infty$, stačí opět podle *Abelovy věty* dokázat, že:

$$B(1) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{4^j} = +\infty.$$

To dokážeme spočtením b_n. Patrně $b_n = 0$ pro liché n. Pro sudé délky n je:

$$b_{2n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2n)!}{j!(n-j)! \cdot j!(n-j)!} = \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}^2.$$

První rovnost plyne uvážením všech j kroků doprava v procházce w. Ty vynucují týž počet j kroků doleva a stejný počet $n - j$ kroků nahoru a dolů. Tyto možnosti počítá multinomický koeficient $\binom{2n}{j,j,n-j,n-j}$.
Poslední rovnost plyne ze známé binomické identity $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$.
Stirlingův vzorec pro aproximaci faktoriálu $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, pro $n \to \infty$, vede na asymptotiku $\binom{2n}{n} \approx cn^{-1/2}4^n$, pro $n \to \infty$ a konstantu $c > 0$. Takže $2n$-tý sčítanec v řadě $B(1) \approx c^2 n^{-1}$ a

$$B(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 4^{-2n} = +\infty,$$

protože $\sum n^{-1} = +\infty$. ∎

9 Konstanta $\rho \neq 0$

Definice 9.1. *(Čtverec):* Obdélník $R \subseteq \mathbb{C}$ je množina

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \mathrm{re}(z) \leq \beta \wedge \gamma \leq \mathrm{im}(z) \leq \delta\}$$

daná reálnými čísly $\alpha < \beta$ a $\gamma < \delta$. Pokud $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, jde o čtverec.

Definice 9.2. *Cauchyova suma* $C(f,p)$ pro funkci $f : u \to \mathbb{C}$ a dělení $p = (a_0, \ldots, a_k)$ úsečky $u = ab$ je:

$$C(f,p) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(a_i - ai - 1) \in \mathbb{C}.$$

Definice 9.3. *(n-ekvidělení úsečky):* Pro $n \in \mathbb{N}$ a pro úsečku $u \subseteq \mathbb{C}$ jejím k-ekvidělením rozumíme dělení u na n podúseček stejné délky $|u|/k$, které je dané obrazy dělení $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \ldots < \frac{k-1}{k} < 1$ jednotkového intervalu.

Definice 9.4. *(Křivkový integrál):* Pokud $f : U \to \mathbb{C}$ je funkce a $\varphi : [a,b] \to U$ je spojitá a po částech hladká funkce, pak integrál funkce f přes křivku φ definujeme jako:

$$\begin{aligned}\oint_{\varphi} f &:= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt \\ &= \int_a^b \mathrm{re}\left(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\right)\ dt + i \int_a^b \mathrm{im}\left(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\right)\ dt\end{aligned}$$

pokud poslední dva (reálné) Riemannovy integrály existují.

Konstanta $\rho = 2\pi i$. Kdyby $\rho = 0$, žádné Cauchyovy vzorce, by neexistovaly a komplexní analýza by se zhroutila.

Věta. *Nechť S je čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$. Potom $\rho := \oint_{\partial S} \frac{1}{z} \neq 0$, dokonce $\mathrm{im}(\rho) \geq 4$.*

Důkaz: Kanonické vrcholy čtverce S jsou

$$a := -1 - i, \quad b := 1 - i, \quad c := 1 + i, \quad d = -1 + i.$$

Nechť $p_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je n-ekvidělení úsečky ab.
Protože násobení i je otočení kolem počátku kladným směrem *(proti směru hodinových ručiček)* o úhel $\pi/2$, tak $q_n = ip_n := (ia_0, , \ldots, ia_n)$ je n-ekvidělení úsečky bc. Podobně vezměme i r_n a s_n. Pro funkci $f(z) = 1/z$:

$$\begin{aligned}C(f, p_n) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(b-a)/n}{a + j(b-a)/n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(ib - ia)/n}{ia + j(ib - ia)/n} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(c-b)/n}{b + j(c-b)/n} = C(f, q_n).\end{aligned}$$

a analogicky pro zbylé dvě rovnosti, tedy dostaneme:

$$C(f, p_n) = C(f, q_n) = C(f, r_n) = C(f, s_n).$$

Můžeme si všimnout, že $b - a = 2$ a že lze sumu rozšířit zlomkem $\frac{2j}{n} - 1 + i$. Dostaneme tak:

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(C(f, p_n)) &= \mathrm{im}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{2/n}{-1 - i + 2j/n}\right) \\ &= \mathrm{im}\left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{2j/n - 1 + i}{(2j/n - 1)^2 + 1}\right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j/n - 1)^2 + 1} \geq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

A jelikož pro konvergentní posloupnost komplexních čísel platí, že $\mathrm{im}(\lim z_n) = \lim \mathrm{im}(z_n)$, tak:

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(\rho) &= \mathrm{im}\left(\oint_{\partial S} \frac{1}{z}\right) = 4 \cdot \mathrm{im}\left(\oint_{ab} \frac{1}{z}\right) \\ &= 4 \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\mathrm{im}\left(C\left(\frac{1}{z}, p_n\right)\right)\right) \\ &\geq 4 \cdot 1 = 4\end{aligned}$$

A tedy skutečně $\rho \neq 0$. ■

10 Cauchy–Goursatova věta pro obdélníky

Definice 10.1. *Diametr (průměr)* pro množinu $X \subseteq \mathbb{C}$ je definovaný jako $\operatorname{diam}(X) = \sup(\{|x-y| \mid x, y \in X\})$.

Definice 10.2. Pro funkci $f : U \to \mathbb{C}$ a bod $z_0 \in U$ je její *derivace* v z_0 definována $f'(z_0) := \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$

Definice 10.3. Funkce $f : U \to \mathbb{C}$ je *holomorfní* na U, pokud má v každém bodu $z_0 \in U$ derivaci.
(Pokud je holomorfní na celé komplexní rovině, nazývá se funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *celá*.)

Důsledek 10.1. *Nechť $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$ a $R \subseteq \mathbb{C}$ je obdélník. Pak* $\oint_{\partial R} (\alpha z + \beta) = 0$.

Věta. *(Cauchy–Goursatova věta pro obdélníky) Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a $R \subseteq U$ je obdélník. Pak*

$$\oint_{\partial R} f = 0.$$

Důkaz: Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní a nechť a $R \subseteq U$ je obdélník. Sestrojíme takové vnořené obdélníky $R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots$, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je R_{n+1} čtvrtka obdélníku R_n a

$$\left| \oint_{\partial R_{n+1}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right|. \tag{1}$$

Nechť už jsou takové obdélníky $R_0, R_1, \ldots, R_n$ definované a A, B, C, D jsou čtvrtky obdélníku R_n. Tvrdíme, že

$$\oint_{\partial R_n} f = \oint_{\partial A} f + \oint_{\partial B} f + \oint_{\partial C} f + \oint_{\partial D} f. \tag{2}$$

Tato identita plyne z použití věty: *Pro každý vnitřní bod c úsečky ab je $\oint_{ab} f = \oint_{ac} f + \oint_{cb} f$.*
Po rozvinutí každého integrálu $\oint_{\partial A} f, \ldots, \oint_{\partial D} f$ jako součtu čtyř integrálů přes strany dostáváme na pravé straně *rovnosti (2)* 16 členů. Osm z nich odpovídá stranám čtvrtek uvnitř R_n a vzájemně se zruší, protože vytvoří čtyři dvojice opačných orientací stejné úsečky. Zbylých osm členů odpovídá stranám čtvrtek ležícím na ∂R_n a sečtou se na integrál na levé straně *rovnosti (2)*.
Z té zároveň plyne, podle trojúhelníkové nerovnosti, že pro nějakou čtvrtku $E \in \{A, B, C, D\}$ je

$$\left| \oint_{\partial E} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \oint_{\partial R_n} f \right|.$$

Položíme tedy $R_{n+1} = E$.

Protože $\lim \operatorname{diam}(R_n) = 0$, tak existuje bod z_0 takový, že $z_0 \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} R_n$. A protože $R_0 = R \subset U$, je i $z_0 \in U$.

Nyní použijeme existenci derivace $f'(z_0)$. Pro dané $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : B(z_0, \delta) \subset U$ a pro nějakou funkci $\Delta : B(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ a $\forall z \in B(z_0, \delta)$ je $|\Delta(z)| < \varepsilon$, a:

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_{g(z)} + \underbrace{\Delta(z) \cdot (z - z_0)}_{h(z)}.$$

Je jasné, že $g(z)$ je lineární a $h(z) = f(z) - g(z)$ je spojitá na $B(z_0, \delta)$.
Nechť $n \in \mathbb{N}_0$ je tak velké, že $R_n \subset B(z_0, \delta)$, protože musíme zajistit, aby $\lim \operatorname{diam}(R_n) = 0$. Podle linearity integrálu a *Důsledku 10.1.* máme:

$$\oint_{\partial R_n} f = \oint_{\partial R_n} g + \oint_{\partial R_n} h \overset{D.2}{=} \oint_{\partial R_n} h. \tag{3}$$

Platí proto odhad:

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial R_n} h \right| &\leq \max_{z \in \partial R_n} |\Delta(z)(z - z_0)| \cdot \operatorname{obv}(R_n) \\ &< \varepsilon \cdot \operatorname{diam}(R_n) \cdot \operatorname{obv}(R_n) = \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{diam}(R)}{2^n} \cdot \frac{\operatorname{obv}(R)}{2^n} \\ &< \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{obv}(R)}{4^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Zde jsme použili výše zmíněné *zmenšení* průměru a obvodu na *polovinu po čtvrcení* a to, že průměr obdélníka je *menší* než jeho obvod. Podle předchozích výsledků tak máme

$$\frac{1}{4^n} \left| \oint_{\partial R} f \right| \overset{(1)}{\leq} \left| \oint_{\partial R_n} f \right| \overset{(3)}{=} \left| \oint_{\partial R_n} h \right| \overset{(4)}{<} \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{obv}(R)^2}{4^n} \quad \text{a tedy} \quad \left| \oint_{\partial R} f \right| < \varepsilon \cdot \operatorname{obv}(R)^2.$$

A protože to platí pro $\forall \varepsilon > 0$, tak $\oint_{\partial R} f = 0$. ∎

11 Picardova věta

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s explicitní první derivací.

Definice 11.1. *Kontrahující zobrazení* je každé takové zobrazení, kde pro:

$$\forall c \in (0,1), \forall a, b \in M: \quad d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a,b)$$

Tedy f zkracuje vzdálenosti nějakým faktorem menším než 100%.

Věta. *(Banachova o pevném bodu). Každé kontrahující zobrazení $f: M \to M$ úplného metrického prostoru do sebe má právě jeden pevný bod. Tedy takový bod $a \in M$, že $f(a) = a$.*

Tvrzení 11.1. *(Úplnost spojitých funkcí). Pro každá $a, b \in \mathbb{R}: a < b$ je metrický prostor $(C[a,b], d)$, spojitých funkcí $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a s maximovou metrikou $d(f,g) = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ úplný.*

Věta. *(Picardova). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pro níž existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbb{R}$ je:*

$$|F(u,v) - F(u,w)| \leq M \cdot |v - w|.$$

Potom existuje $\delta > 0$ a jednoznačně určená funkce $f: [a-\delta, a+\delta] \to \mathbb{R}$, že:

$$f(a) = b \ \wedge \ \forall x \in [a-\delta, a+\delta]: \quad f'(x) = F(x, f(x)). \tag{1}$$

V krajních bodech intervalů se zde i dále hodnoty derivací berou jednostranně.

Důkaz: Nechť $I := [a-\delta, a+\delta]$, pro nějaké malé $\delta > 0$.
Můžeme si všimnout, že řešitelnost *rovnice (1)* pro neznámou funkci f je ze *ZVA1* a *ZVA2* ekvivalentní:

$$\forall x \in I: \quad f(x) = b + \int_a^x F(t, f(t)) \, dt, \tag{2}$$

jednoduchým zintegrováním/ zderivováním obou stran.

Ukážeme, že pro dostatečně malé $\delta > 0$ mají na intervalu I *rovnice (1, 2)* jednoznačné řešení f.
Pravá strana *rovnice (2)* definuje zobrazení $A: C(I) \to C(I)$ z množiny spojitých funkcí $f: I \to \mathbb{R}$ do sebe, tedy:

$$A(f) = g \quad \text{, kde pro} \quad x \in I: \ g(x) := b + \int_a^x F(t, f(t)) \, dt.$$

Dokážeme, že A je kontrahující zobrazení metrického prostoru $(C(I), d)$, s maximovou metrikou d, do sebe.
Vzhledem k *Banachově větě* a *Tvrzení 11.1.* pak má A jednoznačný *pevný bod*, tedy funkci $f \in C(I)$ takovou, že $A(f) = f$, a obě rovnice *(1)* i *(2)* mají jednoznačná řešení.
Dokážeme tedy, že pro dostatečně malé $\delta > 0$ je A kontrahující zobrazení. Nechť $f, g \in C(I)$. Potom:

$$\begin{aligned}
d(A(f), A(g)) &= \max_{x \in I} |A(f)(x) - A(g)(x)| && \ldots\ldots \ \textit{definice metriky } d \\
&= \max_{x \in I} \left| \int_a^x F(t, f(t)) \, dt - \int_a^x F(t, g(t)) \right| && \ldots\ldots \ \textit{definice zobrazení } A \\
&= \max_{x \in I} \left| \int_a^x (F(t, f(t)) - F(t, g(t))) \, dt \right| && \ldots\ldots \ \textit{linearita } \int \\
&\leq \max_{x \in I} \int_a^x |F(t, f(t)) \, dt - F(t, g(t))| \, dt && \ldots\ldots \ \left| \int h \right| \leq \int |h| \\
&\leq \max_{x \in I} \int_a^x M \, |f(t) - g(t)| \, dt && \ldots\ldots \ \textit{předpoklad pro } F \\
&\leq \max_{x \in I} \int_a^x M \cdot d(f,g) \, dt && \ldots\ldots \ h \leq j \implies \int h \leq \int j \\
&= \delta M \cdot d(f,g). && \ldots\ldots \ \int_a^x c = (x-a)c
\end{aligned}$$

Například pro $\delta = \frac{1}{2}M$ je tedy A kontrahující zobrazení, s konstantou $c = \frac{1}{2}$ ∎

12 Diferenciální rovnice)

Lineární diferenciální rovnice jsou rovnice tvaru $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y^{'} + a_0(x)y = b(x)$.

Zadání: *Vyřešte diferenciální rovnici $y' + ay = b$ pro neznámou funkci $y = y(x)$ (a dané funkce $a(x)$ a $b(x)$).* Jedná se o lineární diferenciální rovnici prvního řádu tvaru:

$$(x_0, y_0 \in \mathbb{R}) : y(x_0) = y_0 \quad \wedge \quad y' + a(x)y = b(x), \tag{1}$$

kde $y = y(x)$ je neznámá funkce a funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou dané, definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu I, $x_0 \in I$.
Lokální jednoznačnost a existence řešení rovnice plyne z Picardovy věty, takže stačí rovnici jen vyřešit.

Řešení: Hledáme tedy *integrační faktor* $c = c(x)$ takový, že $c \cdot (y' + ay) = (cy)'$. Potom $cy' + acy = cy' + c'y$ a c musí splňovat rovnici $ac = c'$, čili $(\log c)' = a$. Funkce $c = e^A$, kde $A = \int a$, má tedy požadovanou vlastnost.
Výchozí lineární rovnici vynásobíme integračním faktorem a dostaneme:

$$(cy)' = \underbrace{c(y' + ay) = cb}_{c \cdot (1)}.$$

Takže $(cy)' = cb$ a $cy = D + c_0$, kde $D = \int cb$ a c_0 je *integrační konstanta.* Máme tedy řešení $y = c^{-1}(D + c_0)$.
Neboli:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} b(x)\ dx + c_0 \right), \quad \textit{kde } A(x) = \int a(x)\ dx.$$

Můžeme si všimnout, že $y(x)$ je definováno na celém I a že $\forall y(x_0) = y$ odpovídá právě jedna hodnota c_0.